



# Commande robuste pour l'assistance au contrôle latéral d'un véhicule routier

Thibaut Raharijaoana

## ► To cite this version:

Thibaut Raharijaoana. Commande robuste pour l'assistance au contrôle latéral d'un véhicule routier. Automatique. Université Paris Sud - Paris XI, 2004. Français. NNT : . tel-00721986

**HAL Id: tel-00721986**

**<https://theses.hal.science/tel-00721986>**

Submitted on 31 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS XI  
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

## THÈSE

Présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

PAR

Thibaut RAHARIJAONA

Sujet:

COMMANDE ROBUSTE POUR L'ASSISTANCE AU CONTRÔLE  
LATÉRAL D'UN VÉHICULE ROUTIER

Soutenue le 26 Novembre 2004 devant la Commission d'examen

MME FRANÇOISE LAMNABHI-LAGARRIGUE	Présidente du Jury
M. PHILIPPE CHEVREL	Rapporteur
M. MOHAMED M'SAAD	Rapporteur
M. GILLES DUC	Directeur de Thèse
M. SAÏD MAMMAR	Co-encadrant
M. OLIVIER SENAME	Examineur

Cette Thèse a été effectuée au Département Automatique de Supélec



*à mes parents*  
*à ma famille*



## Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été réalisés au Département Automatique de Supélec et au LIVIC (Laboratoire sur les Interactions Véhicule-Infrastructure-Conducteur) qui est une unité mixte INRETS/LCPC.

Je tiens donc à remercier les personnes suivantes:

Monsieur G. DUC, Professeur à Supélec, Directeur de Thèse, pour son encadrement, son aide et sa disponibilité tout au long de mon travail.

Monsieur S. MAMMAR, Professeur à l'Université d'EVRY, chercheur au CEMIF-LSC et chercheur associé à l'INRETS, pour avoir co-dirigé cette Thèse. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour son soutien et ses conseils avisés.

Monsieur P. CHEVREL, Professeur et HDR à l'école des Mines de Nantes et Monsieur M. M'SAAD, Professeur et HDR à l'Université de Caen, pour avoir accepté de rapporter ce travail.

Madame F. LAMNABHI-LAGARRIGUE, Directrice de Recherche au LSS-CNRS-SUPELEC, pour avoir accepté de présider le Jury.

Monsieur O. SENAME, Maître de Conférence à l'ENSIEG-INPG, pour sa participation à ce Jury et sa contribution par ses remarques pour l'amélioration de mon mémoire.

Monsieur P. BOUCHER, Directeur du Département Automatique de Supélec et Monsieur J-Marc BLOSSEVILLE, Directeur du LIVIC, pour l'accueil qu'ils m'ont réservé pendant les trois années de Thèse.

Je souhaite également vivement remercier l'ensemble des chercheurs, ingénieurs, techniciens, doctorants et administratifs du Département Automatique de Supélec et du LIVIC, pour m'avoir permis de réaliser mes objectifs.



# Table des matières

<b>Sommaire</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>xv</b>
<b>1 Contexte du travail</b>	<b>7</b>
<b>2 Motivations</b>	<b>11</b>
<b>3 Organisation de la Thèse</b>	<b>13</b>
<b>4 Historique et état de l'art</b>	<b>17</b>
4.1 La route intelligente . . . . .	17
4.1.1 Enjeux et Technologie . . . . .	18
4.1.2 Les stratégies . . . . .	20
4.1.2.1 La recherche aux Etats-Unis . . . . .	21
4.1.2.2 La recherche au Japon . . . . .	22
4.1.2.3 La recherche en Europe . . . . .	24
4.2 Le contrôle latéral . . . . .	25
4.2.1 Définitions et objectifs . . . . .	25
4.2.2 Bilan des recherches . . . . .	29
4.2.2.1 La recherche aux Etats-Unis . . . . .	29
4.2.2.2 La recherche au Japon . . . . .	29
4.2.2.3 La recherche en Europe . . . . .	29
<b>I Modélisation, Synthèse et Analyse des systèmes incer-</b>	



<b>tains</b>	<b>31</b>
<b>1 Les Inégalités Matricielles Linéaires</b>	<b>33</b>
1.1 Cadre général . . . . .	33
1.1.1 Définition <i>Positivité d'une matrice</i> . . . . .	34
1.1.2 Définition <i>LMI</i> . . . . .	34
1.1.3 Caractérisation des normes par inégalités matricielles . . . . .	34
1.1.3.1 Norme $H_2$ . . . . .	34
1.1.3.2 Norme $L_\infty$ et $H_\infty$ . . . . .	34
1.1.4 Lemmes de manipulations des inégalités matricielles . . . . .	35
1.1.4.1 Lemme de Schur . . . . .	35
1.1.4.2 Lemme d'élimination . . . . .	36
1.1.4.3 Lemme de complétion . . . . .	36
1.1.5 Des équations de Riccati aux LMI . . . . .	37
1.1.5.1 Définition [ZDG96] . . . . .	37
1.1.5.2 Relation entre équation de Riccati et LMI . . . . .	38
<b>2 Synthèse <math>H_\infty</math> Standard</b>	<b>41</b>
2.1 Le Théorème du petit gain . . . . .	41
2.1.1 Formulation du problème $H_\infty$ standard . . . . .	43
2.1.1.1 Problème $H_\infty$ standard optimal . . . . .	43
2.1.1.2 Problème $H_\infty$ standard sous optimal . . . . .	44
2.1.2 Résolution par les équations de Riccati . . . . .	44
2.1.3 Résolution par LMI . . . . .	46
2.1.3.1 Théorème . . . . .	46
2.1.3.2 Lien avec les équations de Riccati . . . . .	48
2.1.3.3 Avantage de la formulation . . . . .	50
<b>3 Synthèse de correcteurs <math>H_\infty</math>-LPV</b>	<b>51</b>
3.1 Position du problème . . . . .	51
3.2 Résolution du problème par approche polytopique . . . . .	53
3.2.1 Définition du polytope . . . . .	53
3.2.2 Conditions de faisabilité . . . . .	54
3.2.3 Reconstruction des correcteurs aux sommets $\pi_i$ . . . . .	56
<b>4 Synthèse d'un correcteur d'ordre réduit</b>	<b>59</b>
4.1 Réduction a posteriori en boucle ouverte . . . . .	60

4.1.1 Réduction par agrégation modale . . . . .	60
4.1.1.1 Stratégie du choix des modes . . . . .	61
4.1.1.2 Sélection des modes à partir du régime transi- toire . . . . .	61
4.1.1.3 Sélection des modes à partir du régime perma- nent . . . . .	63
4.1.2 Réduction par troncature des valeurs singulières de Hankel . . . . .	63
4.1.2.1 Troncature équilibrée directe . . . . .	65
4.1.2.2 Troncature équilibrée avec conservation du gain statique . . . . .	65
4.1.2.3 Quelques propriétés des troncatures équilibrées	66
4.2 Synthèse avec contrainte d'ordre par LMI . . . . .	67
4.2.1 Méthodologie de la complémentarité conique (dite aussi méthode de la Trace) . . . . .	67
4.2.2 Algorithme de complémentarité conique . . . . .	68
4.3 Synthèse avec contrainte d'ordre par LMI dans le cadre LPV .	69
<b>5 Analyse de Stabilité des Systèmes Incertains</b>	<b>71</b>
5.1 Introduction . . . . .	71
5.2 Représentation générale par LFT . . . . .	71
5.3 Valeur singulière structurée . . . . .	74
5.4 Calcul de la valeur singulière structurée . . . . .	76
5.4.1 Première borne supérieure de la valeur singulière structurée . . . . .	76
5.4.2 Deuxième borne supérieure de la valeur singulière structurée . . . . .	76
5.4.3 Troisième borne supérieure de la valeur singulière structurée . . . . .	77
5.5 Analyse de robustesse par $\mu$ -analyse . . . . .	78
5.6 Robustesse des marges de Stabilité . . . . .	79
5.7 Remarques sur l'utilisation de la $\mu$ -analyse . . . . .	80
5.8 Suppression de l'échantillonnage en fréquence . . . . .	81
5.8.1 Analyse de robustesse par $\nu$ -analyse . . . . .	81
5.8.2 Exploitation optimale des facteurs d'échelle $D$ et $G$ . . .	85
5.9 Analyse de robustesse d'un système LPV incertain . . . . .	87
5.10 Conclusion . . . . .	89

<b>II Application à l'assistance au contrôle latéral d'un véhicule routier</b>	<b>91</b>
<b>1 Modélisation du véhicule et analyse du mode latéral</b>	<b>93</b>
1.1 Introduction . . . . .	93
1.2 Mouvements et organes du véhicule . . . . .	94
1.2.1 Les mouvements du véhicule . . . . .	94
1.2.2 Les organes du véhicule . . . . .	95
1.2.2.1 Les organes pour le contrôle longitudinal . . . . .	95
1.2.2.2 Les organes pour le contrôle latéral . . . . .	96
1.3 Equations de la dynamique du mode latéral d'un véhicule . . . . .	96
1.3.1 Notations et repères . . . . .	97
1.3.2 Expression des principes fondamentaux de la dynamique . . . . .	99
1.4 Les forces de contact . . . . .	103
1.4.1 Le frottement de Coulomb . . . . .	103
1.4.2 Origine des forces de contact . . . . .	104
1.4.3 Formulation des forces . . . . .	105
1.5 Formulation d'un modèle non linéaire pneu/chaussée . . . . .	107
1.6 Formulation du modèle linéaire du véhicule . . . . .	109
1.7 Structure du système Véhicule-Colonne de direction-Conducteur . . . . .	110
1.8 Analyse du mode latéral . . . . .	112
1.8.1 Valeurs numériques . . . . .	112
1.8.2 Comparaison des modèles linéaire et non linéaire . . . . .	113
1.9 Instrumentation en capteurs et actionneurs . . . . .	115
1.9.1 Architecture de la plateforme . . . . .	116
1.9.2 Mesure de la vitesse de lacet . . . . .	117
1.9.3 Mesure de l'accélération transversale . . . . .	118
1.9.4 Mesure du déplacement latéral . . . . .	118
1.9.5 Mesure de l'erreur sur l'angle de cap . . . . .	119
1.9.6 Mesure de la vitesse . . . . .	119
1.9.7 Mesure de l'angle de braquage . . . . .	119
1.9.8 L'actionneur de direction . . . . .	120
1.10 Le simulateur d'environnement routier . . . . .	121
1.11 Conclusion . . . . .	121

<b>2 Synthèse de correcteur <math>H_\infty</math> à vitesse fixe</b>	<b>123</b>
2.1 Stratégie d'assistance en couple . . . . .	123
2.2 Modèle de synthèse . . . . .	124
2.3 Objectifs de commande . . . . .	126
2.4 Synthèse $H_\infty$ . . . . .	127
2.5 Réduction d'ordre du correcteur . . . . .	132
<b>3 Synthèse de correcteur séquencé par la vitesse longitudinale</b>	<b>137</b>
3.1 Introduction . . . . .	137
3.2 Méthodologie de la Synthèse LPV par approche polytopique . .	138
3.2.1 Ecriture du modèle sous forme LPV . . . . .	138
3.2.2 Paramétrage des pondérations LPV . . . . .	142
3.2.3 Construction du correcteur LPV d'ordre plein . . . . .	143
3.2.4 Construction du correcteur LPV avec contrainte d'ordre	146
<b>4 Analyse et comparaison des 2 correcteurs <math>H_\infty</math> et LPV</b>	<b>149</b>
4.1 Analyse de stabilité robuste . . . . .	149
4.1.1 Schéma de la $\mu$ -analyse . . . . .	149
4.1.2 Résultats de la $\mu$ -analyse . . . . .	158
4.1.2.1 Analyse des correcteurs réduits à posteriori en boucle ouverte . . . . .	158
4.1.2.2 Analyse d'un correcteur réduit, synthétisé par l'algorithme de minimisation de la trace . . . . .	159
4.1.3 Conclusion . . . . .	162
4.2 Simulations avec correcteur $H_\infty$ fixe . . . . .	162
4.2.1 Rejet de perturbations . . . . .	163
4.2.2 Changement de voie . . . . .	163
4.2.3 Manoeuvre d'aquaplaning . . . . .	164
4.2.4 Validation avec des données réelles . . . . .	166
4.3 Comparaison des stratégies $H_\infty$ et LPV . . . . .	167
4.3.1 Rejet de perturbation . . . . .	168
4.3.2 Rejet de perturbation et décélération en virage . . . . .	169
4.3.3 Rejet de perturbation et perte d'adhérence à vitesse va- riable . . . . .	170
4.3.4 Validation sur la piste d'essai cartographiée . . . . .	171
4.4 Conclusion . . . . .	172



# Table des figures

4-1	La voiture intelligente dans son environnement . . . . .	20
4-2	Véhicule intelligent en 1977 . . . . .	22
4-3	Application de la conduite en peloton . . . . .	23
2-1	Représentation générale des incertitudes de modélisation . . .	42
2-2	Problème $H_\infty$ standard . . . . .	43
3-1	Système et correcteur dépendant de paramètres . . . . .	52
3-2	Domaine d'évolution du paramètres $\theta(t)$ lorsque $p = 2$ . . . . .	53
5-1	Schéma général d'étude de la robustesse de la stabilité . . . . .	72
5-2	Définition du produit étoile de Redheffer . . . . .	74
5-3	Analyse de la singularité par la valeur singulière structurée .	75
5-4	Prise en compte des facteurs d'échelle $D$ . . . . .	77
5-5	Incorporation d'incertitudes complexes en entrée du système .	79
5-6	Schéma de la $\mu$ -analyse . . . . .	82
5-7	Schéma de la $\nu$ -analyse . . . . .	83
5-8	Analyse de robustesse d'un système LPV incertain . . . . .	87
1-1	Les degrés de liberté du véhicule . . . . .	95
1-2	Les organes constitutifs du mode longitudinal . . . . .	95
1-3	Les organes constitutifs du mode latéral . . . . .	96
1-4	Passage de $R^a$ à $R^v$ . . . . .	98
1-5	(a) Passage de $R^v$ à $R^i$ , (b) Passage de $R^i$ à $R^c$ . . . . .	99
1-6	Vitesse au niveau du contact pneu/chaussée . . . . .	104
1-7	Forme de la courbe de la force latérale ou longitudinale . . . . .	106
1-8	Représentation du véhicule et des forces extérieures . . . . .	108
1-9	Schématisation des entrées et sorties du modèle véhicule . . .	109
1-10	Modèle de la colonne de direction . . . . .	111
1-11	Modèle du conducteur . . . . .	111

1-12	Système bouclé par le conducteur . . . . .	112
1-13	Comparaison de $\psi_L$ à (a) $5m.s^{-1}$ , (b) $20m.s^{-1}$ , (c) $40m.s^{-1}$ . . . . .	114
1-14	Comparaison des trajectoires du véhicule à (a) $5m.s^{-1}$ , (b) $20m.s^{-1}$ , (c) $40m.s^{-1}$ . . . . .	114
1-15	Comparaison de $\psi_L$ à (a) $\nu = 0,3$ (b) $\nu = 0,6$ (c) $\nu = 1$ . . . . .	115
1-16	Comparaison des trajectoires du véhicule à (a) $\nu = 0,3$ (b) $\nu = 0,6$ (c) $\nu = 1$ . . . . .	115
1-17	Véhicule de prototypage . . . . .	116
1-18	Ordinateur et connectique . . . . .	116
1-19	Schéma synoptique de l'application de l'assistance au contrôle latéral . . . . .	117
1-20	Gyroscope en lacet et accéléromètre transversal . . . . .	118
1-21	Caméra frontale . . . . .	119
1-22	Codeur optique pour la mesure de l'angle au volant . . . . .	120
1-23	(a) Equipement de la colonne de direction (b) Carte de puissance . . . . .	120
1-24	Interfaces du simulateur . . . . .	122
2-1	Stratégie d'assistance en boucle fermée . . . . .	126
2-2	Schéma de synthèse du correcteur . . . . .	128
2-3	Analyse fréquentielle (a) $ \frac{y_L}{f_w} $ et (b) $ \frac{T_a}{f_w} $ . . . . .	129
2-4	Diagrammes de Bode du correcteur (a)entrée $y_L$ , (b)entrée $\psi_L$ . . . . .	130
2-5	Diagramme de Black du correcteur $H_\infty$ . . . . .	130
2-6	Rafale de vent latéral . . . . .	131
2-7	(a) déplacement latéral (b) erreur sur l'angle de cap, trait plein : correcteur $W_2 = 0$ , trait pointillé : correcteur $W_2 \neq 0$ . . . . .	131
2-8	(a)Couple d'assistance $T_a$ (b)Accélération latérale . . . . .	132
2-9	Modes et énergies associées . . . . .	134
2-10	Diagrammes de Bode des correcteurs : Entrée $y_L$ . . . . .	135
2-11	Diagrammes de Bode des correcteurs : Entrée $\psi_L$ . . . . .	135
2-12	Diagrammes de Black de la boucle ouverte corrigée . . . . .	136
3-1	Stratégie d'assistance $H_\infty$ /LPV en boucle fermée . . . . .	138
3-2	Modèle de synthèse en boucle ouverte . . . . .	140
3-3	Modèle de synthèse LPV . . . . .	141
3-4	Modèle de synthèse LPV global . . . . .	141
3-5	Système augmenté des pondérations . . . . .	142
3-6	Diagramme de Bode du correcteur LPV pour l'entrée $y_L$ . . . . .	143
3-7	Diagramme de Bode du correcteur LPV pour l'entrée $\psi_L$ . . . . .	144

3-8	Analyse fréquentielle en boucle fermée (a) $ \frac{y_L}{f_w} $ et (b) $ \frac{\psi_L}{f_w} $ . . . .	144
3-9	Diagramme de Black du correcteur $H_\infty$ /LPV (trait plein) . . .	145
3-10	Analyse fréquentielle en boucle fermée (a) $ \frac{y_L}{f_w} $ et (b) $ \frac{\psi_L}{f_w} $ . . . .	146
3-11	Diagramme de Bode du correcteur LPV réduit pour l'entrée $y_L$	147
3-12	Diagramme de Bode du correcteur LPV réduit pour l'entrée $\psi_L$	147
4-1	Analyse de robustesse . . . . .	156
4-2	Représentation du transfert $\frac{G}{G_0} - 1$ pour $\omega_n \in [5 \text{ rad/s}; 10 \text{ rad/s}]$ et $\tau_L \in [0,5 \text{ s}; 0,9 \text{ s}]$ . . . . .	157
4-3	Représentation du transfert $\frac{G}{G_0} - 1$ pour $\omega_n \in [10 \text{ rad/s}; 15 \text{ rad/s}]$ et $\tau_L \in [1,1 \text{ s}; 1,5 \text{ s}]$ . . . . .	157
4-4	Amplitude du Filtre $W_d$ . . . . .	158
4-5	$\bar{\mu}$ pour la réduction par agrégation . . . . .	159
4-6	$\bar{\mu}$ pour la réduction par troncature des valeurs singulières de Hankel . . . . .	160
4-7	$\bar{\mu}$ pour l'algorithme de la Trace . . . . .	161
4-8	(a) déplacement latéral (b) erreur sur l'angle de cap avec le correcteur . . . . .	164
4-9	Profil de la chicane . . . . .	164
4-10	Comparaison (a)des déplacements latéraux (b)des erreurs sur l'angle de cap, avec et sans l'assistance . . . . .	165
4-11	Accélération latérale . . . . .	165
4-12	(a) Trajectoire nominale du véhicule (b) Comparaison des dé- placements latéraux à la distance $l_S$ avec et sans assistance .	166
4-13	Présentation de la piste cartographiée . . . . .	167
4-14	$y_L$ sur la moitié de la piste . . . . .	167
4-15	(a)Rafales de vent latéral (b)Profil de vitesse . . . . .	168
4-16	(a) $y_L$ avec les rafales de vent latéral $f_w = 500\text{N}$ (b) $\psi_L$ . . . . .	168
4-17	Couple d'assistance $T_a$ . . . . .	169
4-18	(a) $y_L$ (b) $\psi_L$ , avec les rafales de vent $f_w = 500\text{N}$ en virage . . . .	170
4-19	(a) $y_L$ (b) $\psi_L$ , avec les rafales et pertes d'adhérence en virage . .	170
4-20	Comparaison des déplacements latéraux sur la piste entière .	172





# Liste des publications

## Conférences internationales avec actes

T. Raharijaona, G. Duc , S. Mammar , "Application de la synthèse LPV à l'assistance au contrôle latéral d'un véhicule routier ", *IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Douz, Tunisie, novembre 2004.

T. Raharijaona, G. Duc , S. Mammar , " Linear Parameter-Varying Control and H-infinity Synthesis dedicated to Lateral Driving Assistance ", *IEEE Intelligent Vehicle Symposium*, Parme, juin 2004.

T. Raharijaona, G. Duc , S. Mammar , " H-infinity controller synthesis and analysis with application to lateral driving assistance ", *1st IFAC Symposium on Advances in Automotive Control* , Salerne, avril 2004.

T. Raharijaona, G. Duc , S. Mammar , " Robust control and mu-analysis with application to lateral driving assistance ", *IEEE 2003 International Conference on Intelligent Transportation Systems* , Shanghai, octobre 2003.

S. Mammar, T. Raharijaona, S. Glaser, G. Duc, " Lateral Driving Assistance Using Robust Control and Embedded Driver-Vehicle-Road Model", *International Association for Vehicle System Dynamics Symposium*, Kanagawa, août 2003.

**Colloques avec actes**

T. Raharijaona, G. Duc, S. Mammar, "Synthèse H-infini et mu-analyse appliquées à l'assistance au contrôle latéral de véhicule routier", *Journées Doctorales d'Automatique*, Valenciennes, Juin 2003.

**Colloques sans acte**

T. Raharijaona , "Assistance au contrôle latéral d'un véhicule routier", *Colloque ARCOS*, Versailles-Satory, Juin 2003.

**Article de Revue**

S. Mammar, T. Raharijaona, S. Glaser, G. Duc, "Lateral driving assistance using robust control embedded driver-vehicle-road model", *Vehicle System Dynamics*, Volume 41 Supplement, 2004, pages 311-320.

**Article de Revue en préparation**

T. Raharijaona, G. Duc, S. Mammar, "H-infinity and Linear parameter varying synthesis with application to lateral driving assistance", *ASME Journal of Applied Mechanics*.

## Notations et Définitions

LFT	Transformation Fractionnaire Linéaire
LMI	Inégalité Matricielle Linéaire
LPV	Linéaire à Paramètres Variant
vss	Valeur Singulière Structurée
$\mathcal{RH}_\infty$	Ensemble des matrices de fonctions de transfert rationnelles propres à coefficients réels n'ayant pas de pôles à partie réelle positive ou nulle - les dimensions sont implicitement définies par le contexte



# **Introduction générale**



# Chapitre 1

## Contexte du travail

Cette Thèse se situe dans le cadre des recherches menées au Département Automatique de Supélec sur la commande robuste et au LIVIC (Laboratoire de recherche sur les Interactions Véhicule-Infrastructure-Conducteur).

Elle participe à la mise en oeuvre de correcteurs dédiés à l'assistance au contrôle latéral d'un véhicule routier.

Elle établit également une continuité des travaux effectués lors d'une précédente Thèse [Bag01], qui avait pour but de contribuer à la mise en oeuvre d'un véhicule "laboratoire" permettant ainsi d'expérimenter les algorithmes développés et des techniques de commande pour la conduite automatisée. Les méthodes qui ont été développées sont reposées sur les techniques d'optimisation  $H_\infty$  basées sur les facteurs premiers.

Par ailleurs, les applications présentées s'insèrent pleinement dans le Thème 3-Tâche 4 : " Sécurisation de la trajectoire " du projet ARCoS (Action de Recherche pour une Conduite Sécurisée). Le projet ARCoS s'inscrit dans la lignée des actions fédératives du PREDIT et cherche à améliorer la sécurité routière. Le but à terme est de réduire de plus de 30% les accidents. Bénéficiant d'une approche du système sous la forme Véhicule-Infrastructure-Conducteur, le projet doit sécuriser la conduite automobile selon 4 fonctions principales :

- 1** Gérer les interdistances entre véhicules
- 2** Prévenir les collisions sur obstacles fixes, arrêtés ou lents
- 3** Prévenir les sorties de route
- 4** Alerter les véhicules en amont d'accidents / incidents



Géré de façon analogue aux projets industriels, ARCoS est organisé selon onze thèmes, qui permettent d'intégrer les apports des sciences de l'ingénieur, des sciences humaines, et des sciences sociales. Il regroupe des acteurs variés dans le domaine de l'étude de la sécurité routière : des universitaires, des équipementiers, des constructeurs, des laboratoires publics et privés. Les alertes étant fournies au conducteur, les problèmes d'ergonomie ainsi que les aspects juridiques sont également abordés. La partie expérimentale de ce projet consiste à développer à plus ou moins court terme des fonctions sur des démonstrateurs.

Il est aussi transverse, dans la mesure où il s'intéresse :

- ◇ aux nouvelles assistances à la conduite qui peuvent être fournies au conducteur.
- ◇ aux nouveaux capteurs à développer pour que ces assistances soient disponibles.
- ◇ aux moyens de transmettre ces assistances au conducteur.
- ◇ au cadre juridique dans lequel ces assistances sont possibles.

Finalement, une réflexion est menée en parallèle sur l'évolution future des systèmes d'assistance à la conduite.

L'objectif de cette Thèse, au sein de ce travail, est de mettre en oeuvre un correcteur qui soit en mesure d'assister le conducteur dans les situations de suivi de voies et de rejeter diverses perturbations auxquelles est soumis le véhicule telles que des vents latéraux ou un dévers de la route, tout en respectant les contraintes de confort, d'agrément de conduite et les limitations pratiques de l'actionneur de direction. Pour ce faire, les compétences pratiques du LIVIC sont également indispensables.

La stratégie d'assistance retenue consiste à ajouter un couple à celui délivré par le conducteur grâce à l'intégration d'un moteur à courant continu sur la colonne de direction. En conséquence, le lien mécanique entre le volant et les roues avant est conservé. Le dimensionnement et l'instrumentation du dispositif de commande s'avèrent être primordiaux dans la mesure où l'application doit être réalisée sur un véhicule de série. Le moteur destiné à équiper le véhicule doit en particulier limiter l'action du conducteur à 4 N.m au niveau du volant.

Le but principal est d'assurer le confort des passagers tout en atténuant l'effet des accélérations et des secousses latérales. Cette étude est rendue délicate dans la mesure où des paramètres comme la vitesse, la masse du véhicule et l'adhérence des pneumatiques placent le véhicule dans la catégorie des systèmes incertains.



## Chapitre 2

# Motivations

Le véhicule est un système complexe sujet à de nombreuses incertitudes sur la masse, la vitesse et l'adhérence des pneumatiques par exemple et soumis à de multiples perturbations telles que des vents latéraux ou le dévers de la route. De plus, l'objectif étant d'élaborer une loi de commande qui permette d'assister le conducteur dans ses manoeuvres, l'usage des correcteurs classiques de type PID ou à gain fixe ne suffit plus [AGS<sup>+</sup>95].

La conception d'un système d'assistance au contrôle latéral apparaît donc comme un problème de robustesse face aux incertitudes et aux perturbations.

Les méthodes de type  $H_\infty$  se révèlent maintenant de plus en plus utilisées dans la résolution de problèmes de commande robuste et les résultats théoriques liés à ces approches sont connus.

Ces stratégies de commande font l'objet depuis plusieurs années d'une intense activité de recherche au Département Automatique de Supélec. En effet, une solide expérience et un savoir faire en matière de synthèse  $H_\infty$  par inégalités matricielles linéaires sont acquis et se développent. Cette ligne directrice a notamment été initiée avec les travaux de Saïd Mammar sur la synthèse par factorisations premières [Mam92] et Stéphane Font [Fon95] dans le cadre de l'approche standard, puis avec Gérard Scorletti dont la thèse constitue une étude précise sur les LMI [Sco97], Catherine Valentin-Charbonnel [VC98] dont les travaux se focalisent sur la synthèse de correcteurs d'ordre réduit et Arnaud Hired [Hir99] dont la thèse traite de la modélisation, l'analyse et la synthèse de correcteurs dans le cas des systèmes Linéaires à Paramètres Variants (LPV) incertains.

De plus, dans le but de satisfaire aux exigences des spécifications, l'analyse de robustesse d'une loi de commande est primordiale. Elle permet de valider la phase de synthèse ou bien de la modifier si besoin pour atteindre les objectifs.

Relevant également du cadre  $H_\infty$ , la valeur singulière structurée a été développée à cette fin, et sa mise en oeuvre, appelée  $\mu$ -analyse, a démontré son efficacité [DF99] [ZDG96].

L'ensemble constitué par la synthèse  $H_\infty$  et la  $\mu$ -analyse, prolongé par les méthodes LPV pour les systèmes variant dans le temps, offre donc un cadre de travail particulièrement riche. L'application de ces techniques à maints problèmes a montré qu'il s'agit d'approches à la fois souples et efficaces. En effet, les commandes de ce type permettent de garantir la robustesse des lois de commande et de prendre en compte des attributs de performance par l'introduction de pondérations fréquentielles sur différentes grandeurs représentatives. Leurs propriétés en font des outils a priori bien adaptés à la synthèse d'un dispositif d'assistance au contrôle latéral, et c'est pourquoi nous les avons retenues.

## Chapitre 3

# Organisation de la Thèse

Cette Thèse s'insère dans le cadre d'un projet national de large envergure (ARCoS). Elle doit donc respecter le rythme et les exigences des différents partenaires universitaires et industriels impliqués.

Cette activité de recherche qui a pour objectif de développer un dispositif d'aide à la conduite a donc été organisée de manière structurée.

Ce mémoire de Thèse est articulé autour de deux grandes parties.

### **Partie I : Modélisation, Synthèse et Analyse des systèmes incertains**

Cette partie dont l'accent est méthodologique présente les outils mathématiques qui sont utilisés au cours de la Thèse.

La modélisation, la synthèse et l'analyse des systèmes incertains sont exposées dans un cadre de travail qui est fondé sur le Théorème du petit gain. Le formalisme LMI est présenté puis sera utilisé dans le développement de l'application. Il permet de structurer le problème sous forme d'un jeu d'une ou plusieurs inégalités qui sont résolues par les mêmes algorithmes d'optimisation convexe.

Les synthèses  $H_\infty$  standard et  $H_\infty$ /LPV sont exposées aux chapitres 2 et 3. Dans ce contexte, les résolutions par les équations de Riccati et par LMI sont présentées.

Le chapitre 4 souligne les méthodes de synthèse d'un correcteur d'ordre réduit qui ont été mises en oeuvre pour l'assistance au contrôle latéral. Plus précisément, trois techniques sont appliquées à

savoir : la réduction par agrégation modale, la réduction *a posteriori* par troncature des valeurs singulières de Hankel puis une méthode de synthèse de correcteur sous contrainte LMI utilisant l'algorithme de complémentarité conique.

Le chapitre 5 de cette partie est consacré aux diverses techniques d'analyse de robustesse dérivées de l'indicateur dénommé valeur singulière structurée. Différentes méthodes de  $\mu$ -analyse sont abordées. En particulier, celles faisant intervenir ou non un échantillonnage en fréquence sont présentées et seront utilisées par la suite.

## **Partie II : Application à l'assistance au contrôle latéral de véhicule routier**

La modélisation des véhicules légers se révèle particulièrement délicate et complexe. Afin de reproduire de manière réaliste le comportement dynamique du véhicule, la prise en compte des différentes composantes, des différents mouvements du châssis et de la caisse rend le travail compliqué. Un modèle mathématique simplifié, décrivant les mouvements de ce dernier, doit être en mesure de contribuer de façon notable à la compréhension de certains phénomènes et d'aider à la détermination et la validation de lois de commande. La modélisation du véhicule n'était pas le but du travail effectué au cours de cette Thèse. Toutefois, il est de première importance de comprendre et de présenter la structure représentative du véhicule adoptée. Le développement de cette partie se focalise donc sur le modèle latéral qui est ensuite utilisé. Il intègre le déplacement latéral, l'angle de cap, l'angle de dérive ainsi que leurs dérivées premières. L'entrée de commande est constituée de l'angle de braquage des roues avant. Sous certaines hypothèses simplificatrices, un modèle linéaire analytique est obtenu. Il s'agit du modèle bicyclette d'ordre 4. Ce modèle servira aussi lors de la synthèse des correcteurs.

L'instrumentation nécessaire au contrôle latéral est donnée au paragraphe 1.9. Elle fournit quelques éléments au sujet du véhicule de prototypage qui sera développé dans le cadre du projet ARCoS.

Le chapitre 2 s'intéresse à l'application des méthodes de contrôle

robuste de type  $H_\infty$  à l'assistance au contrôle latéral. De plus, il expose les résultats obtenus après réduction du correcteur. Plusieurs situations de conduite sont reproduites de manière à souligner l'apport sécuritaire de la stratégie de commande élaborée.

Lorsque les caractéristiques du système varient fortement, un correcteur fixe peut difficilement remplir l'ensemble des objectifs de performances et de robustesse imposés sur la totalité du domaine de fonctionnement. C'est pourquoi, lorsque un ou plusieurs paramètres sont mesurables ou estimables en temps réel, il est souhaitable de les utiliser pour séquencer le correcteur. Le paramètre facilement mesurable est ici la vitesse longitudinale, et le chapitre 3 présente la synthèse LPV de correcteurs séquencés par la vitesse. Les résultats obtenus sont ensuite analysés et comparés dans le chapitre 4.





## Chapitre 4

# Historique et état de l'art

### 4.1 La route intelligente

L'automobile qui se déplace dans son infrastructure constitue un système complexe et rapide. Il peut devenir instable dans certains cas. Dans sa globalité, la problématique automobile est caractérisée par plusieurs éléments dont :

- ◇ Le véhicule qui peut être modélisé de manière plus ou moins complexe et contrôlé.
- ◇ L'interaction pneu-chaussée qui est difficile à modéliser et dont certaines grandeurs telles que l'adhérence sont difficilement mesurables.
- ◇ Le conducteur et son comportement qui est variable et dont la modélisation est réalisable de manière moyenne, approchée ou statistique. Toutefois, il constitue l'élément essentiel de la chaîne d'action et de contrôle du véhicule.
- ◇ La route génère les perturbations par sa géométrie, son état, son revêtement et son environnement. Elle impose au conducteur des choix plus ou moins urgents, sur autoroute, lors d'évitement d'obstacle, de maintien de voie ou bien de freinage d'urgence. Dans le but de la rendre plus sécuritaire, elle devient communicante.

Le domaine de l'automobile est donc très riche pour la recherche de l'automaticien. Les méthodes classiques et modernes de l'Automatique trouvent de nombreuses applications dans des situations très délicates dans la mesure où les signaux sont fortement bruités, les modèles élaborés non linéaires, sensibles à certaines variations de paramètres et d'ordre élevé. Les constructeurs et les pouvoirs publics se voient de plus en plus

intéressés dans l'élaboration d'études de fond.

Les accidents de la route ont des coûts humains et économiques considérables bien qu'ils soient en constante diminution. Le nombre de tués en 2003 a diminué de 21% par rapport à l'année 2002. Toutefois, il y a eu en 2003, 115 929 blessés et 5731 tués comme le rapporte l'Observatoire National de la Sécurité Routière. Ces chiffres demeurent élevés et l'amélioration de la sécurité reste un objectif important. Les principales causes des accidents routiers restent la vitesse trop élevée, l'incapacité à prédire la trajectoire du véhicule, le manque d'attention et la négligence, l'incapacité à estimer la vitesse des autres véhicules, la distraction due à un événement extérieur au véhicule ou bien la mauvaise appréciation de l'état de la chaussée.

Depuis quelques années, le véhicule se voit être le laboratoire où sont implantés de nouveaux équipements électroniques dans le but d'améliorer les conditions de conduite et la sécurité. Dans un futur très proche, on pourra trouver sur véhicule :

- ◇ Des capteurs intégrés tels que des radars, lidars et caméras qui serviront à situer le véhicule et ses voisins dans son environnement.
- ◇ Des actionneurs électriques tels que le papillon, le dispositif d'assistance de direction, l'assistance électronique au freinage. Ils communiquent via le réseau de bord.
- ◇ Une interface communicante entre l'infrastructure et le véhicule via des capteurs disposés sur le route et embarqués.

Les thématiques de recherche dans le domaine automobile tendent donc à s'intéresser à des systèmes d'assistance et de copilotage qui informent et assistent le conducteur dans ses manoeuvres. Le système qui est considéré est alors constitué de l'infrastructure, du véhicule et du conducteur.

#### **4.1.1 Enjeux et Technologie**

Le concept de "route intelligente" est désormais employé pour illustrer l'apparition de technologies combinant l'informatique et les télécommunications sur la route. L'accomplissement des intenses activités liées à la conduite et l'automobile constitue l'élaboration d'une route automatisée. Elle doit permettre un meilleur usage des infrastructures actuelles et une augmentation des débits tout en améliorant la sécurité.

Les premières solutions se basent sur une action sur le trafic de façon à répartir et réguler les flux sur le réseau au moyen des feux tricolores. De grandes métropoles appliquent déjà de telles stratégies. A Londres, un algorithme de commande optimisé en temps réel dénommé SCOOT est installé [HRBW81]. En Australie, il s'appelle SCATS et aux Etats Unis OPAC. Le principe est celui d'une boucle fermée dont une séquence de commande est calculée sur la base d'une modélisation. L'effet de la commande sur le trafic est aussi modélisé et pris en compte par la commande suivante.

De plus, à Paris, dans la région parisienne, et dans de nombreuses villes de province, des systèmes de gestion centralisée des feux sont opérationnels. Le système des ondes vertes en fait partie. Il permet aux usagers d'éviter de s'arrêter à tous les carrefours. Aujourd'hui, on adopte le concept d'onde verte modérante. Il a pour objectif la régulation de la vitesse des flux.

Par ailleurs, un effort est donné aux systèmes de gestion des transports en commun pour que les usagers n'attendent pas au feu rouge par exemple. Des capteurs détectent l'arrivée des autobus ou des tramways et transmettent l'information à un dispositif de supervision des feux tricolores. La connaissance de la position de chaque véhicule de la flotte est donnée par GPS et facilite ainsi la circulation en centre ville ou dans les zones congestionnées.

Sur les autoroutes et autres grands axes, les méthodes employées sont informatives et peuvent utiliser les panneaux à messages variables (PMV). Ces équipements servent par exemple à réguler la vitesse pour réduire également l'émission de polluants dans le cas de pics de pollution. Comme application concrète, on peut citer l'autoroute Nord de Marseille où une régulation de vitesse est mise en place. Les vitesses moyennes pratiquées en aval du système sont affichées ce qui a pour effet d'homogénéiser le flot, réduire le pourcentage de vitesses excessives et d'avertir les usagers en cas de problème. Les véhicules se voient par ailleurs équiper de dispositifs d'information embarqués qui peuvent être adaptés au trajet et à la conduite. D'autres stratégies consistent à déléguer la conduite et à faire ainsi appel à l'utilisation de systèmes isolés tels que des radars anti-collision.

Le terme "route intelligente" englobe également les applications de la télématique pour l'amélioration de la sécurité des usagers de la route qui ne sont pas seulement au volant. Les signaux sonores adaptés et la prolongation du temps de traversée pour les aveugles et les malvoyants en sont l'illustration.

### 4.1.2 Les stratégies

La "route intelligente" est l'objet du développement d'une multitude de stratégies. Dans le cadre de la gestion de trafic, l'apport des outils de la télématique est considérable. Ils se manifestent par l'utilisation du GPS pour la localisation et de la radio par exemple pour la diffusion d'information aux usagers. Du contrôle de la signalisation des feux tricolores à la mise en place des panneaux à messages variables, ces méthodes qui maintenant sont courantes prouvent leur efficacité dans leur objectif d'optimiser les réseaux routiers urbains et périurbains.

En prenant en compte chacune des composantes du système Véhicule/Infrastructure/Conducteur, des technologies pionnières font leur apparition et se dégage l'idée de la "voiture intelligente". Dans cet axe, les aides à la conduite cherchent à améliorer et à transformer les conditions de circulation et doivent permettre une meilleure coopération entre le conducteur, son véhicule et l'infrastructure. Ces systèmes sont susceptibles de transformer l'usage des automobiles pour une augmentation de la sécurité de la circulation. La Figure 4-1 illustre une scène de communication entre le véhicule et son infrastructure.

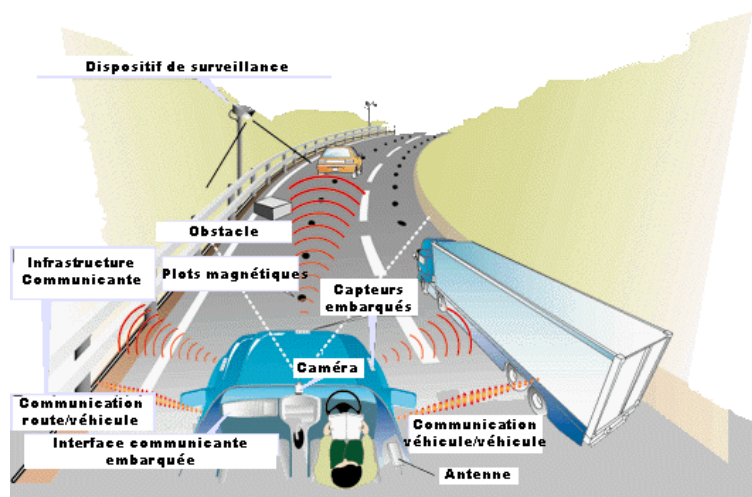


FIG. 4-1 – La voiture intelligente dans son environnement

Les grands programmes mondiaux de recherches concernant l'assistance à la conduite sont centrés sur des avancées importantes en matière de réduction de l'accidentologie et des congestions. Un des objectifs concerne notamment la diminution de l'insécurité routière dans les zones

rurales où les accidents représentent environ 60% des victimes de la route. Dans ce contexte, le programme ARCoS a défini ses actions et ses objectifs. Les causes d'accidents sur route rurale sont relativement bien identifiées. On retrouve :

- ◇ Les sorties de route. Elles engendrent plus d'un tiers des tués.
- ◇ Les croisements de voies.
- ◇ La fatigue et la perte de vigilance du conducteur.

Les stratégies d'assistance applicables en milieu rural sont fondées sur la notion de trajectoire de référence : position latérale, vitesse et accélération du véhicule en fonction de l'abscisse curviligne de la chaussée. Le but est de conseiller le conducteur ou d'encadrer ses actions en minimisant les risques et en le laissant maître de son véhicule.

La méthode envisagée pour répondre à cette problématique consiste à effectuer un guidage latéral qui est couplé à un contrôle avancé de la vitesse longitudinale au moyen des techniques de perception associées à plusieurs capteurs tels qu'un radar, une caméra, un lidar ou bien intégrant des informations délivrées par cartographie et communication locale avec l'infrastructure.

#### **4.1.2.1 La recherche aux Etats-Unis**

Depuis une vingtaine d'années, de nombreux projets concernant le concept d'autoroute automatisée ont été menés (<http://www.its.dot.gov/>). Le projet américain ITS-AHS (Intelligent Transportation System-Automated Highway Systems) en 1988 prend en compte le développement de l'automatisation de la conduite automobile dans le cadre des systèmes intelligents de transport. Il est structuré selon plusieurs axes dont l'un concerne la coopération entre le conducteur, le véhicule et l'infrastructure et s'attache à l'intégration de fonctions de contrôle longitudinal et latéral de manière totale ou partielle.

Les projets américains NAHSC (National Automated Highway Systems Consortium) et IVHS (Intelligent Vehicle-Highway Systems) inscrivent leurs recherches et développement dans la même lignée que celles du programme précédent depuis 1994. Il est certain que les Etats-Unis ont pris une longueur d'avance par l'utilisation dans le domaine civil des technologies développées par l'industrie de la Défense Nationale. Ainsi, le Consortium pour un Système National d'Autoroutes Automatisées a montré que

la conduite automatisée pouvait devenir réalité. La démonstration a eu lieu au nord de San Diego en Juillet 1997 : des voitures se sont déplacées sans intervention humaine sur un tronçon autoroutier de dix kilomètres. Huit voitures se sont déplacées en convoi, guidées par des aimants enfouis dans le revêtement de l'autoroute. Elles ont accéléré, roulé à vitesse constante, décéléré, quitté ou rejoint le convoi sans que leurs conducteurs n'aient à aucun moment posé les mains sur le volant, ou les pieds sur les pédales. En 1997, le projet IVI (Intelligent Vehicle Initiative [http ://www.its.gov/ivi/mission.html](http://www.its.gov/ivi/mission.html)) développe des dispositifs d'assistance et oriente ses activités sur le plan technique. Ces projets allient à la fois la recherche universitaire et le support d'institutions fédérales ou d'industriels.

#### 4.1.2.2 La recherche au Japon

En 1977, le laboratoire d'Ingénierie Mécanique développe le premier véhicule intelligent qui utilise la vision. Ce véhicule est présenté sur la Figure 4-2.



FIG. 4-2 – Véhicule intelligent en 1977

Depuis les recherches sont orientées vers l'assistance à la conduite dont l'objectif est l'amélioration de la sécurité. VICS (Vehicle Information and Communication Systems), ARTS (Advanced Road Transportation Systems) et ASV (Advanced Safety Vehicles) sont autant de projets sous la tutelle du Ministère de la construction et de la police nationale qui ont été conduits jusqu'en 1996. Le Japon a créé en 1996, l'association AHSRA (Advanced Cruise-Assist Highway Research Association). Elle est large-

ment soutenue par les ministères de la construction et des transports. Ils se focalisent principalement sur l'amélioration de la sécurité avec une implication importante de l'infrastructure et de la communication véhicule/infrastructure. Une illustration en est l'application des contrôles longitudinal et latéral aux systèmes de platooning (conduite en peloton).



FIG. 4-3 – Application de la conduite en peloton

La Figure 4-3 présente une application d'un groupe de véhicules qui se déplacent de manière automatisée "à l'unison". Ce type de dispositif qui pourrait constituer une solution aux problèmes de congestion des grands axes autoroutiers, contribue également à optimiser la consommation du carburant et ainsi à préserver l'environnement et ses ressources naturelles. Il faut également souligner que les constructeurs automobiles japonais tels que Mitsubishi, Nissan, Toyota, Honda, sont largement impliqués dans les projets de développement des systèmes de transport intelligents.

Aujourd'hui, à titre d'exemple, Honda a annoncé le lancement du premier système CMS (Collision Mitigation Brake) au monde. Ce système n'intervient pas seulement dans la manoeuvre de freinage en cas d'hésitation du conducteur, mais peut également prévoir les situations d'accident et diminuer de ce fait le risque encouru par les passagers. L'objectif de ce système consiste à empêcher une collision en amorçant préalablement toutes les contre-mesures nécessaires. Ainsi, ce système calcule la probabilité d'une collision sur la base des conditions de conduite, de la distance par rapport au véhicule précédent et de la vitesse relative. Le CMS émet alors des signaux visuels et sonores pour que le conducteur réagisse de manière adéquate à la situation. Si la situation l'impose, le CMS intervient alors lui-même pour éviter la collision. Ce dispositif de sécurité active, combiné



à un mécanisme de tendeur de sangles "E-Pretensioner" équipera la nouvelle Honda Inspire. La voiture de tourisme fait donc l'objet d'innovations technologiques considérables et autant dire que les constructeurs automobiles font de la sécurité une de leurs priorités majeures.

#### **4.1.2.3 La recherche en Europe**

Cela fait maintenant près de vingt ans que des programmes européens comme PROMETHEUS (Program for a European Traffic with Highest Efficiency and Unprecedented Safety) ou CARMINAT (initié par RENAULT) s'attachent à offrir à la voiture des moyens de devenir plus sécuritaire. On peut également citer DRIVES (Dedicated Road Infrastructure for Vehicle Safety in Europe), UDC (Urban Drive Control), CHAUFFEUR. En Europe, le concept de "route intelligente" est largement prépondérant sur celui de route automatisée.

De plus, l'apport de la télématique dans la voiture est en pleine expansion et se trouve déjà bien présent. Les systèmes de suivi par satellite, capables de localiser géographiquement une voiture volée et de l'arrêter à distance sont maintenant opérationnels. Lancia et Alfa-Romeo proposent déjà cette option. Une comparaison entre le Japon, les Etats-Unis et l'Europe du développement de la télématique montre que les priorités et les attentes sont sensiblement différentes. En Europe, l'état du trafic en temps réel est prioritaire. Au Japon, tout le monde regarde la télévision dans la voiture.

En France, le projet LaRA (La Route Automatisée) a permis de développer des systèmes d'assistance à la conduite dans l'objectif de contribuer à une automatisation. Ce groupe de recherche regroupe laboratoires et écoles dont l'INRETS, le LCPC, l'INRIA, l'ENSMP et l'ENPC. Le laboratoire de recherche LIVIC, créé en 1999 focalise ses recherches et applications sur des fonctions techniques permettant l'évolution à la fois du véhicule, du comportement du conducteur et de l'infrastructure. Il est en étroite collaboration avec de nombreux industriels et équipementiers automobiles et s'implique dans plusieurs projets d'envergure nationale et internationale.

Le développement de la "voiture intelligente" en France est soutenu par de multiples programmes et instituts dont le Programme de REcherche et d'Innovation pour les Transports terrestres (PREDIT), le Programme Cadre de Recherche et Développement (PCRD), l'Institut National de REcherche sur les Transports et leur Sécurité (INRETS), le Centre d'Études sur les Réseaux, les Transports et l'Urbanisme (CERTU) et l'Architecture Cadre pour

les Transports Intelligents en France (ACTIF). Depuis 2001, le projet AR-CoS dans lequel s'insère ce travail de Thèse associe différents partenaires académiques et industriels pour contribuer à l'amélioration de la sécurité routière.

Plus récemment, le projet européen PReVENT financé au titre du 6<sup>ième</sup> programme cadre implique quelques 50 partenaires des secteurs public et privé. Il a pour but de développer des dispositifs sécuritaires qui utilisent des moyens de perception et de communication intelligents embarqués pour l'assistance à la conduite. A court terme, le projet PReVENT doit aider le conducteur à éviter les accidents.

## **4.2 Le contrôle latéral**

### **4.2.1 Définitions et objectifs**

Le contrôle d'un véhicule est un vaste sujet qui se décompose en plusieurs domaines d'activités dont ceux qui concernent le groupe motopropulseur et le châssis. Dans le cas du contrôle dynamique du châssis, deux tâches se distinguent : le contrôle longitudinal et le contrôle latéral [PHT94].

Le contrôle longitudinal consiste à adapter l'allure du véhicule en agissant sur l'accélération et le freinage. Il est également possible de tenir compte de paramètres de conduite tels que l'état du contact pneu/chaussée ou bien de consignes fournies par l'intermédiaire de panneaux de signalisation ou de communication.

Le contrôle latéral est responsable du maintien de voie du véhicule et agit sur les organes de direction tels que la colonne pour le braquage des roues, la suspension et même les freins dans le cadre d'une sécurité active de type ESP (Electronic Stability Program).

#### **La route automatisée**

Depuis 1995, des réflexions approfondies et des évaluations sont menées sur le thème de la route automatisée. Un rapport concernant l'état de l'art et les réflexions relatifs à ce sujet a été rédigé pour la DRAST (Direction de la Recherche et des Affaires Scientifiques et Techniques) [BAM96].

Les concepts de route automatisée identifiés comprennent à la fois des scénarii urbains, péri-urbains et à trafic mixte ou dédié [RAu98]. La

faisabilité technique est alors envisagée en tenant compte de chacune des composantes du système constitué du conducteur, du véhicule et de l'infrastructure.

Pour le maintien de voie, différentes stratégies sont possibles telles que le filoguidage, le suivi de plots ou de bandes magnétiques, de réflecteurs optiques et l'utilisation de radar et lidar.

De manière analogue au contrôle longitudinal qui peut être effectué seul lorsque le conducteur est responsable du comportement latéral du véhicule, le contrôle latéral peut être indépendant. Le conducteur pilote alors la vitesse et repère les obstacles sur la chaussée.

Avec l'avènement des nouvelles générations de véhicules équipés en série d'airbags, de prétensionneurs de ceinture, la voiture ne se limite plus à protéger des chocs mais a pour but de les éviter. Le développement des systèmes de sécurité active tels que l'ESP, l'AICC (Autonomous Intelligent Cruise Control) et les dispositifs d'anti-collision montre le souhait des constructeurs de privilégier les études sur la dynamique longitudinale du véhicule. Depuis peu, la dynamique latérale avec action sur le volant est abordée. Ainsi récemment, ZF a mis au point un système de direction active AFS (Active Front Steering). Il corrige l'angle de braquage des roues en cas de dérapage par exemple et s'inscrit ainsi dans le cadre des nouveaux dispositifs d'assistance à la conduite. A ce jour, peu de travaux ont été menés pour fusionner toutes les fonctionnalités nécessaires au sein du même système.

### **Vers l'assistance au contrôle latéral**

Le contrôle latéral trouve beaucoup d'applications dans le domaine de l'assistance à la conduite. L'adjonction d'un couple supplémentaire à celui exercé par l'automobiliste dans les manoeuvres de suivi de voie ou bien pour les rejets de perturbations sont autant de stratégies prometteuses à l'étude [AB96], [AB98], [MB00].

Plus le confort de l'automobiliste est important, plus sa concentration est grande. Les aspects portant sur la qualité de la conduite sont donc considérés par les constructeurs et chercheurs depuis quelques années [KS80], [NW79], [SDHT91] et font l'objet de plus d'attention aujourd'hui. Les critères de confort doivent être obligatoirement pris en compte lors de la synthèse de correcteurs. Dans le cadre du maintien de voie ce qui constitue le contexte du travail de Thèse, l'objectif du contrôle latéral est de maintenir à zéro une erreur de suivi de consigne

tout en assurant le confort des passagers ce qui se traduit par une atténuation de l'amplitude des accélérations et une limitation des secousses latérales. Le contrôle de la dynamique latérale du véhicule nécessite la prise en compte à la fois d'une action lente pour assurer le suivi de voie et d'une action plus rapide que celle du conducteur, pour la commande du lacet par exemple, dans des situations critiques de perte de contrôle. De plus, il s'agit d'une problématique délicate dans la mesure où des paramètres variables comme la vitesse, la masse du véhicule, l'adhérence des pneumatiques rendent le système incertain. L'utilisation des correcteurs classiques de type PID ou à gain fixe ne permet plus de satisfaire aux exigences de robustesse et performance [AGS<sup>+</sup>95]. Viennent s'ajouter également les perturbations telles que les rafales de vent, un dévers de la route, une plaque de verglas. L'élaboration d'une assistance au contrôle latéral s'avère donc être un problème de robustesse faces aux incertitudes et aux perturbations [Mam96], [OIU96].

De multiples méthodologies de commande combinées à des techniques de perception ont permis de réaliser des innovations en terme de sécurité active et d'assistance. Un état de l'art est effectué dans [AM96], [BM00], [Mam99].

Dans le cadre du contrôle latéral, les solutions techniques adoptées se fondent sur les méthodes de l'Automatique, à savoir :

- ◇ Les commandes classiques de type PD, PID [GTP96], [AGS<sup>+</sup>95].  
Le but est de compenser le retard de phase induit aux vitesses longitudinales élevées. L'action intégrale a pour fonction d'annuler le déplacement latéral pour une courbure constante.
- ◇ Les commandes robustes LQG, FSLQ (Frequency Shaped Linear Quadratic),  $H_2$ ,  $H_\infty$  [PT90], [Mam00]. Elles garantissent la robustesse des lois de commande et prennent en compte les spécifications de performance et de qualité de conduite par l'introduction de pondérations fréquentielles sur différentes grandeurs représentatives.
- ◇ Les commandes par modes glissants [GUP94], [AGS<sup>+</sup>95]. Les surfaces de glissement associent le déplacement latéral, l'angle de cap et la vitesse de lacet.
- ◇ La commande floue [HT95], [Mam98]. Deux stratégies sont présentées. L'un est fondée sur la description de type Hadani et essaie de repro-

duire le comportement d'un conducteur par l'exploitation d'informations exprimées en terme "rapide", "lent", "grand", "petit". L'autre correspond au formalisme de Tagaki-Sugeno. Ces approches permettent de construire des lois de commande robustes qui s'apparentent à des stratégies de séquençement de gain.

- ◇ La commande neuronale [Pom93]. Les réseaux neuronaux sont de taille réduite et se distinguent par leur forme directe, radiale, ou récurrente. L'information entrante est fournie par les capteurs.

Il faut également noter que les deux variables principales disponibles pour le bouclage sont constituées du déplacement latéral et de l'erreur sur l'angle de cap. De plus, l'information de courbure de la route peut être utilisée pour rendre le suivi de voie plus précis.

De façon à mettre en application les différentes stratégies de contrôle latéral, le véhicule nécessite une instrumentation en capteurs et actionneurs performante. Les méthodes de perception sont très variées et on distingue deux grandes catégories :

- **Les capteurs extéroceptifs.**

Ils ont pour objectif de renseigner le véhicule sur son déplacement dans son environnement. Ils regroupent principalement :

- ▶ Une caméra. Elle est disposée dans l'habitacle et acquiert 30 images par secondes. Grâce à deux algorithmes de vision exécutés en temps réel et en parallèle, le déplacement latéral et l'erreur sur l'angle de cap sont déterminés.
- ▶ D'autres dispositifs tels que les câbles rayonnants, les plots magnétiques et les bandes lasers. Ils permettent de répondre aux défaillances du module de vision dont les performances s'avèrent dépendantes des conditions climatiques. Lorsqu'ils sont couplés à l'information délivrée via la caméra, la localisation latérale du véhicule est rendue plus précise et plus fiable.

- **Les capteurs proprioceptifs.**

Ils fournissent des informations sur l'état du véhicule. Pour le contrôle latéral, ils sont constitués par :

- ▶ Un gyroscope. Il permet de déterminer la vitesse de l'angle de lacet. Il peut être utilisé pour des observateurs (estimation du rayon de courbure par exemple) et peut servir directement pour la commande.

- ▶ Un odomètre. Il mesure la vitesse longitudinale du véhicule. Cette information pourra être utilisée pour mettre en oeuvre une stratégie dite de séquençement de gain.
- ▶ Un codeur optique. Il donne la position angulaire des roues avant. Ce capteur est utilisé pour l'asservissement en position du moteur implanté sur la colonne de direction.
- ▶ Un capteur de couple. Il est disposé sur la colonne et délivre l'effort exercé par le conducteur sur le volant.

## **4.2.2 Bilan des recherches**

### **4.2.2.1 La recherche aux Etats-Unis**

Dans le cadre du programme PATH (Partners for Advanced Transit and Highway) à l'Université de Californie à Berkeley, l'équipe qui se focalise sur le contrôle latéral depuis plusieurs années est dirigée par le Professeur M. Tomizuka. Les premiers travaux et développements sont présentés dans [Sa78], [SDHT91]. Le travail de l'équipe est fortement marqué par une implication sur le thème du contrôle latéral dans le cadre du projet NAHSC et de l'automatisation de la conduite pour la circulation en peloton.

Les axes de recherches concernent également la conduite automatisée des poids lourds, des autobus et les stratégies d'assistance [Fen99], [FTT00], [FTT99]. Chronologiquement, les stratégies de commande mises en oeuvre ont concerné la commande FSLQ [HPTZ91], puis les modes glissants, la commande floue et dernièrement méthodologies de type  $H_\infty$ .

### **4.2.2.2 La recherche au Japon**

La littérature au sujet de l'automatisation de la conduite et du contrôle latéral n'est pas très abondante. Les travaux dans ces domaines sont en majorité soutenus par les constructeurs automobiles tels que Honda, Toyota, Mitsubishi, Nissan. L'assistance à la conduite est un axe de développement en pleine expansion avec l'avènement des systèmes Steer-by-Wire.

### **4.2.2.3 La recherche en Europe**

#### **♦ En Allemagne**

Le projet CHAUFFEUR étudie l'automatisation totale de la conduite et

la circulation en peloton. Les travaux concernant le contrôle latéral sont largement menés par les constructeurs et équipementiers automobiles allemands dont on peut citer récemment ZF (ZahnradFabrik) avec le système AFS (Active Front Steering). Il s'agit d'une direction active qui permet de modifier la sensibilité du volant lorsqu'il se trouve au point milieu en fonction de la vitesse du véhicule. Elle équipe la BMW série 5.

Le DLR (Deutschen Zentrum für Luft-und Raumfahrt) est un des laboratoires les plus actifs dans le domaine du contrôle latéral.

◆ **En France**

La problématique du contrôle latéral est peu abordée par les laboratoires français. On peut néanmoins citer le LIVIC [Bag01], le LAG [Cla02] qui a étudié la conduite en peloton et l'équipe de l'université d'Amiens. Elle se focalise sur le développement de commande à base de logique floue.

**Première partie**

**Modélisation, Synthèse et  
Analyse des systèmes  
incertains**





# Chapitre 1

## Les Inégalités Matricielles Linéaires

Les Inégalités Matricielles Linéaires, dénommées LMI , constituent un outil utilisé dans la résolution de problèmes d'optimisation convexe sous contraintes, présentés dans la suite de ce manuscrit.

Ce chapitre est dédié à l'exposé des propriétés théoriques nécessaires à l'obtention des résultats.

### 1.1 Cadre général

L'utilisation des LMI date d'une centaine d'années par l'apport des travaux de Lyapunov [Lya88] sur les conditions de stabilité des systèmes linéaires modélisés sous la forme  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ . La stabilité d'un tel système est équivalente à trouver une matrice  $P$  symétrique définie positive telle que  $A^T P + P A < 0$ .

Un des objectifs actuels est d'exprimer des problèmes d'Automatique complexes en utilisant le formalisme LMI, dans le but d'aboutir à une résolution par optimisation convexe. De nombreux travaux ont été publiés depuis le début des années 90, parmi lesquels on peut citer par exemple [BBFG93], [BBN90], [GA94].

### 1.1.1 Définition Positivité d'une matrice

Soit la matrice  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $X = X^T$ ,  $X$  est définie positive si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, x^T X x > 0 \quad (1.1)$$

### 1.1.2 Définition LMI

Une Inégalité Matricielle Linéaire est définie par une contrainte du type [BGFB94] :

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_m F_m > 0 \quad (1.2)$$

où  $x = (x_1 \dots x_m)^T \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des  $m$  variables,  $F_0, F_1, \dots, F_m$  sont des matrices symétriques données appartenant à  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

Il existe aussi des LMI non strictes  $F(x) \geq 0$ . La matrice  $F(x)$  est alors dite semi-définie positive.

### 1.1.3 Caractérisation des normes par inégalités matricielles

#### 1.1.3.1 Norme $H_2$

Soit un système stable et strictement propre de matrice de transfert  $G(s)$  et de représentation d'état minimale  $(A, B, C, 0)$ . La norme  $H_2$  de  $G(s)$  s'exprime par l'une des deux expressions équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_2 &= \sqrt{\inf_{P=P^T} \{ \text{trace}(CPC^T) / AP + PA^T + BB^T < 0 \}} \\ &= \sqrt{\inf_{Q=Q^T} \{ \text{trace}(B^TQB^T) / A^TQ + QA + C^TC < 0 \}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

#### 1.1.3.2 Norme $L_\infty$ et $H_\infty$

Soit le système continu décrit par la représentation d'état minimale :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) + D.u(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

où :  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .

Sa fonction de transfert est définie par :

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.5)$$

Les lemmes suivants permettent de caractériser par inégalités matricielles les normes  $L_\infty$  ou  $H_\infty$  du transfert  $T(s)$ .

**Lemme 1.1.1.** *Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

$$i) \|T(s)\|_\infty < \gamma$$

ii) *il existe une matrice  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique solution de l'inégalité matricielle :*

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A & X B & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.6)$$

Si le système étudié est stable, une condition de positivité de la variable de décision  $X$  doit être ajoutée pour obtenir une équivalence. Ce résultat est connu sous le nom de "Lemme Borné Réel" [BGFB94] :

**Lemme 1.1.2. Lemme Borné Réel**

*Si le système est stable,  $\|T(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement s'il existe une matrice  $X$  symétrique définie positive solution de la LMI :*

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A & X B & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.7)$$

Ce lemme reste valable dans le cas où  $\|T(s)\|_\infty \leq \gamma$  en remplaçant l'inégalité (1.7) par une inégalité large.

Il faut noter que (1.7) étant une LMI en  $X$  et  $\gamma$ , elle permet de rechercher  $\|T(s)\|_\infty$  en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\gamma, X=X^T>0}(\gamma) \text{ sous la contrainte (1.7)}$$

.

#### 1.1.4 Lemmes de manipulations des inégalités matricielles

##### 1.1.4.1 Lemme de Schur

Ce Lemme permet de transformer des inégalités non linéaires convexes en LMI. Il est démontré dans [HJ85].

**Lemme 1.1.3. La LMI**

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (1.8)$$

où  $Q(x) = Q(x)^T$ ,  $R(x) = R(x)^T$  et  $S(x)$  sont des matrices affines en  $x$ , est équivalente à :

$$\begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Dans le cas d'inégalités non strictes, le lemme précédent devient [BGFB94] :

**Lemme 1.1.4.** *La LMI*

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.10)$$

où  $Q(x) = Q(x)^T$ ,  $R(x) = R(x)^T$  et  $S(x)$  sont des matrices affines en  $x$ , est équivalente à :

$$\begin{cases} R(x) \geq 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^+S(x)^T > 0 \\ S(x)(I - R(x)R(x)^+) = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

où  $R(x)^+$  désigne la pseudo-inverse de Moore-Penrose de  $R(x)$ .

#### 1.1.4.2 Lemme d'élimination

Ce Lemme est utilisé dans la phase de synthèse de correcteurs. Il est également appelé Lemme de projection [BGFB94]. Sa formulation est la suivante :

**Lemme 1.1.5.** *Soient trois matrices  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $V \in \mathbb{R}^{n \times q}$ . Les deux problèmes suivants sont équivalents :*

$$\begin{aligned} i) & \exists K \in \mathbb{R}^{p \times q} / G + UKV^T + VK^T U^T < 0 \\ ii) & \begin{cases} U^\perp G U^\perp < 0 \\ V^\perp G V^\perp < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où  $U^\perp$  et  $V^\perp$  sont les compléments orthogonaux des matrices  $U$  et  $V$  :  $U^T U^\perp = 0$  et  $[U \ U^\perp]$  est de rang  $n$  ; de même pour  $V^\perp$ .

#### 1.1.4.3 Lemme de complétion

Le Lemme de complétion est utilisé lors de la synthèse de correcteurs avec critère  $H_\infty$ . Il permet de restreindre le nombre de variables lorsqu'une inégalité matricielle fait intervenir une matrice et son inverse [PZPB91].

**Lemme 1.1.6.** Soient  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X = X^T > 0$ ,  $Y = Y^T > 0$  et  $r \in \mathcal{N}^*$ , alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\exists X_{12} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $X_2 = X_2^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$  telles que :
$$\begin{pmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & X_2 \end{pmatrix} > 0 \text{ et } \begin{pmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & X_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Y & * \\ * & * \end{pmatrix}$$
- ii)  $\begin{pmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{pmatrix} \geq 0$  et  $\text{rang} \begin{pmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{pmatrix} \leq n + r$
- iii)  $\begin{pmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{pmatrix} \geq 0$  et  $\text{rang} \begin{pmatrix} XY - I_n \end{pmatrix} \leq r$

### 1.1.5 Des équations de Riccati aux LMI

La résolution de nombreux problèmes d'Automatique s'effectuait, il y a une vingtaine d'années, par l'utilisation des équations de Riccati. Comparativement aux procédures de résolution du problème LMI, les procédures impliquant les équations de Riccati sont numériquement moins coûteuses et engendrent moins de problèmes de convergence.

Techniquement, encore aujourd'hui, une résolution par équations de Riccati est préférée à celle de la formulation LMI. Depuis une dizaine d'années, de nombreuses problématiques d'Automatique ont trouvé une reformulation par inégalités matricielles affines comme le montrent [BGFB94] et [PZPB91]. C'est pourquoi, il paraît intéressant d'établir un lien entre ces deux approches.

En outre, il est courant pour des problèmes ne possédant pas de solution analytique de voir une formulation LMI qui s'avère plus adaptée. Parce qu'il est plus général que les équations de Riccati, l'outil LMI est plus élégant dans bon nombre de situations malgré sa résolution numérique plus coûteuse.

#### 1.1.5.1 Définition [ZDG96]

Soit  $A$ ,  $Q$  et  $P$  des matrices  $n \times n$  réelles avec  $Q$  et  $P$  symétriques. Une équation algébrique de Riccati (ARE) a la forme suivante :

$$A^T X + X A + X P X + Q = 0 \quad (1.12)$$

On associe à cette équation de Riccati la matrice Hamiltonienne  $2n \times 2n$  :

$$H := \begin{bmatrix} A & P \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Supposons que  $H$  n'ait pas de valeur propre sur l'axe imaginaire. Elle a alors  $n$  valeurs propres à partie réelle strictement négative et  $n$  à partie réelle strictement positive.

Soit  $[X_1^T \ X_2^T]^T$ , avec  $X_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, 2$ , une base de l'espace propre associé aux valeurs propres à partie réelle strictement négative. Supposons de plus que  $X_1$  soit inversible, ou de manière équivalente, que les deux sous-espaces :

$$\text{Im} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \text{ et } \text{Im} \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ I_n \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

soient complémentaires.

Alors,  $X := X_2 X_1^{-1}$  est déterminée de façon unique à partir de  $H$ , elle est réelle symétrique et vérifie l'équation algébrique de Riccati (1.12). De plus, elle assure que  $A + PX$  n'a que des valeurs propres à partie réelle strictement négative. Cette matrice est appelée la solution stabilisante de (1.12) et est notée :

$$X = \text{Ric}(H) \quad (1.15)$$

Enfin on appelle  $\text{dom}(\text{Ric})$  l'ensemble des matrices Hamiltoniennes  $H$  qui vérifient les deux propriétés :

- i)  $H$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.
- ii) les deux sous-espaces définis par (1.14) sont complémentaires.

### 1.1.5.2 Relation entre équation de Riccati et LMI

Le théorème suivant présente la relation existant entre les équations algébriques de Riccati et les LMI.

#### **Théorème 1.1.1.** [ZD98]

Soit  $P \geq 0$ . Supposons que  $(A, P)$  soit commandable et qu'il existe une matrice  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique telle que :

$$XA + A^T X + X P X + Q < 0 \quad (1.16)$$

Alors, il existe une solution  $X_+ > 0$  de l'équation de Riccati :

$$X_+ A + A^T X_+ + X_+ P X_+ + Q = 0 \quad (1.17)$$

---

*telle que les valeurs propres de  $A + PX_+$  sont à partie réelle strictement positive.*





## Chapitre 2

# Synthèse $H_\infty$ Standard

La synthèse  $H_\infty$  par approche standard constitue une méthode de construction de correcteurs utilisant des outils fréquentiels.

Le système en boucle fermée, décrit également par des incertitudes, doit couramment satisfaire des exigences formulées en terme d'objectifs de commande. Celles-ci sont alors réalisées grâce à l'étude des marges de stabilité et au modelage de transferts entrée/sortie du modèle de synthèse de façon que le système commandé possède de bonnes propriétés de stabilité et de performance.

Le Théorème du petit gain est la base du développement des outils d'analyse qui permettent de mettre en oeuvre une stratégie de contrôle par optimisation  $H_\infty$ .

### 2.1 Le Théorème du petit gain

Le théorème du petit gain [DV75] permet de donner une condition suffisante de stabilité d'un système nominal stable qui fait l'objet d'incertitudes modélisées sous forme non structurée [ZDG96].

Considérons le système interconnecté présenté sur la Figure 2-1 :

**Théorème 2.1.1.** *Supposons  $H(s) \in \mathbb{R}H_\infty$  et soit  $\gamma > 0$ . Le système interconnecté de la Figure 1 est bien posé et stable de manière interne pour toute matrice  $\Delta(s) \in \mathbb{R}H_\infty$  telle que  $\|\Delta(s)\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$  si et seulement si  $\|H_{11}(s)\|_\infty < \gamma$ , où  $H_{11}(s)$  est le transfert entre  $v_\Delta$  et  $z_\Delta$ .*

Grâce au théorème précédent, l'approche  $H_\infty$  permet théoriquement de prendre en compte *a priori* la robustesse lors de la synthèse d'un

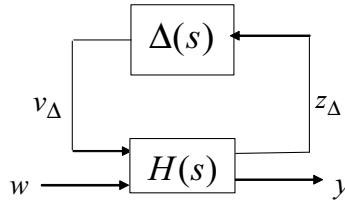


FIG. 2-1 – Représentation générale des incertitudes de modélisation

correcteur. Toutefois la condition énoncée par le théorème est nécessaire et suffisante si aucune structure n'est imposée à la matrice  $\Delta(s)$ .

Vis-à-vis d'incertitudes physiques dont les transferts ont une structure particulière, la condition est seulement suffisante. Il s'avère alors que souvent la formulation ne peut engendrer de résultats satisfaisants en pratique.

Dans le cadre des travaux réalisés sur l'assistance au contrôle latéral, on considère les spécifications de robustesse de manière à conserver une famille de modèles proche du système physique considéré à savoir le conducteur, le véhicule et sa colonne de direction. La synthèse  $H_\infty$  ne permet pas de prendre en compte de façon explicite toutes ces incertitudes et la robustesse sera donc vérifiée *a posteriori* par  $\mu$ -analyse. Elle permettra par contre de traiter les contraintes de performances formulées en terme de bande passante, précision, limitation de la commande, atténuation des hautes fréquences, ainsi que des contraintes globales de stabilité telles que les marges de gain et de phase, par un modelage des fonctions de transfert du système corrigé.

Notre intérêt s'est principalement focalisé sur la formulation  $H_\infty$  standard. Celle-ci est développée dans ce chapitre. Plusieurs méthodes de résolution sont envisageables et la plus classique utilise la théorie des équations de Riccati. Cette solution aboutit à un correcteur d'ordre déterminé égal à celui du système augmenté des pondérations. Une méthode plus récente se base sur une formulation par Inégalités Matricielles Affines. Elle sera également utilisée dans l'élaboration d'une commande appropriée à l'application.

### 2.1.1 Formulation du problème $H_\infty$ standard

Le problème  $H_\infty$  standard est présenté sur la Figure 2-2.

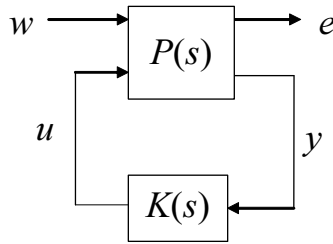


FIG. 2-2 – Problème  $H_\infty$  standard

La matrice de transfert  $P(s)$  modélise les interactions dynamiques entre les entrées  $(w, u)$  et les sorties  $(e, y)$ .

Le vecteur  $w$  contient les entrées extérieures telles que les signaux de référence, les perturbations et les bruits. Le vecteur  $u$  représente les commandes ;  $e$  contient les sorties à réguler et  $y$  les grandeurs mesurables disponibles pour construire la commande.

Mettre le problème sous forme standard revient donc à choisir les entrées et les sorties à réguler en fonction des spécifications et à intégrer des filtres de pondération fréquentielle. Ceux-ci doivent traduire les objectifs de performance et de robustesse de la commande. Des travaux approfondis ont été effectués dans ce domaine notamment dans [Fon95], [DFBV97], [PTG90], [Chr96].

La matrice de transfert entre  $w$  et  $e$  du système en boucle fermée est obtenue par la Transformation Fractionnaire Linéaire inférieure :

$$\mathcal{F}_l(P(s), K(s)) = P_{ew}(s) + P_{eu}K(s)(I - P_{yu}K(s))^{-1}P_{yw}(s) \quad (2.1)$$

La synthèse  $H_\infty$  du correcteur est définie par les problèmes suivants :

#### 2.1.1.1 Problème $H_\infty$ standard optimal

Trouver tous les correcteurs  $K(s)$  qui stabilisent le système bouclé de la Figure 2-2, et minimisent  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty$ .

### 2.1.1.2 Problème $H_\infty$ standard sous optimal

$\gamma > 0$  étant donné, trouver tous les correcteurs  $K(s)$  qui stabilisent le système en boucle fermée de la Figure 2, et assurent  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ .

La valeur de  $\gamma$  est en général appelée niveau  $H_\infty$  ;  $\gamma_{min}$  est le niveau  $H_\infty$  optimal.

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre le problème  $H_\infty$  standard. L'approche qui est présentée ici utilise les équations de Riccati. Cette méthode sera privilégiée dans la suite des travaux car elle est peu coûteuse en temps de calcul. Elle consiste à rechercher la valeur optimale de  $\gamma$  par dichotomie.

La matrice d'interconnexion  $P(s)$  de la Figure 2-2 est décrite par la représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  ;  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  ;  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  ;  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  ;  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ .

### 2.1.2 Résolution par les équations de Riccati

La méthode de résolution par les équations de Riccati utilise l'algorithme de Glover-Doyle. Celui-ci a été mis en oeuvre dans les années 80 [DGKF89], [GD88]. Cet outil est à la base des applications de la synthèse  $H_\infty$ .

Soit le problème  $H_\infty$  standard et les hypothèses suivantes :

H1)  $(A, B_u)$  est stabilisable et  $(C_y, A)$  est détectable.

H2)  $\text{rang}(D_{eu}) = n_u$  et  $\text{rang}(D_{yw}) = n_y$ .

H3)  $\forall \omega \in \mathbb{R} \text{ rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_u \\ C_e & D_{eu} \end{bmatrix} = n + n_u$

H4)  $\forall \omega \in \mathbb{R} \text{ rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix} = n + n_y$

Notons que l'hypothèse H1 constitue l'hypothèse classique de toute méthode de synthèse utilisant les variables d'état. Elle assure la stabilité du système en boucle fermée. H2 est une condition suffisante et garantit que le correcteur soit propre. H3 entraîne que  $P_{eu}(s)$  n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire. Il en est de même pour H4 et  $P_{yw}(s)$ .

Dans la suite, on ajoute les hypothèses simplificatrices suivantes, dites hypothèses de normalisation :

$$H5) D_{eu}^T(D_{eu} \ C_e) = (I \ 0) \text{ et } D_{yw}(D_{yw}^T \ B_w^T) = (I \ 0)$$

$$H6) D_{ew} = 0 \text{ et } D_{yu} = 0$$

On peut toujours satisfaire H5 – H6 par des changements de variables appropriés.

Le Théorème suivant est un moyen d'évaluer la faisabilité du problème standard.

**Théorème 2.1.2.** *Sous les hypothèse H1-H4 et les conditions H5-H6, le problème  $H_\infty$  a une solution si et seulement si les 5 conditions suivantes sont remplies :*

i) la matrice  $H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_w B_w^T - B_u B_u^T \\ -C_e^T C_e & -A^T \end{bmatrix}$  ne possède pas de valeur propre sur l'axe imaginaire

ii) Il existe une matrice  $X_\infty = Ric(H_\infty) \geq 0$

iii) La matrice  $J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2}C_e C_e^T - C_y C_y^T \\ -B_w^T B_w & -A \end{bmatrix}$  ne possède pas de valeur propre sur l'axe imaginaire

iv) Il existe une matrice  $Y_\infty = Ric(J_\infty) \geq 0$

v)  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$  où  $\rho(\cdot)$  désigne le module de la plus grande valeur propre.

La solution du problème standard est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.1.3.** *Supposons que les conditions du Théorème 2.1.2 soient vérifiées. Les correcteurs rationnels  $K(s)$  stabilisant le système et satisfaisant  $\|\mathcal{F}_l(P(s), K(s))\|_\infty < \gamma$  sont décrits par la LFT :*

$$K(s) = \mathcal{F}_l(K_a(s), \Phi(s)) \quad (2.3)$$

où  $\Phi(s) \in \mathbb{R}H_\infty$  est une matrice de transfert de dimension  $n_u \times n_y$  arbitraire vérifiant  $\|\Phi(s)\|_\infty < \gamma$ , et  $K_a(s)$  est décrit par la représentation d'état

suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a(t) \\ u(t) \\ u_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T & Z_\infty B_u \\ -B_u^T X_\infty & 0 & I_{n_u} \\ -C_y & I_{n_y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ y(t) \\ y_a(t) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_w B_w^T X_\infty - B_u B_u^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_y^T C$$

$$Z_\infty = (I_n - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$$

Finalement, le correcteur obtenu pour  $\Phi(s) = 0$  appelé correcteur central a pour représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T \\ -B_u^T X_\infty & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Le théorème 2.1.2 ne donne pas une expression explicite de la valeur optimale  $\gamma_{min}$ . La valeur optimale du niveau  $H_\infty$  est approchée par dichotomie en utilisant les résultats du théorème 2.1.2 (procédure dite de  $\gamma$ -itération). En pratique, on cherche donc la valeur de  $\gamma$  la plus petite possible et proche de 1. Le correcteur central est ensuite calculé en appliquant le théorème 2.1.3.

### 2.1.3 Résolution par LMI

La synthèse de correcteur par LMI est plus récente que celle utilisant les équations de Riccati. Elle constitue une manière différente de résoudre le problème  $H_\infty$  standard [GA94], [IS94].

Sa généralité réside dans le fait qu'elle ne nécessite pas le respect des hypothèses  $H2 - H6$ . De plus, l'algorithme de résolution par  $\gamma$ -itération n'est pas requis.

#### 2.1.3.1 Théorème

De manière similaire à la résolution par équations de Riccati, on suppose  $D_{yu} = 0$ . Si tel n'est pas le cas, il est possible de réintroduire  $D_{yu}$  par la suite.

Sous les hypothèses  $(A, B_u)$  stabilisable et  $(C_y, A)$  détectable, on écrit le théorème suivant :

**Théorème 2.1.4.** *Le problème  $H_\infty$  sous-optimal admet une solution si et seulement si il existe deux matrices symétriques  $R$  et  $S$  de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  satisfaisant le système LMI suivant :*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{N}_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_e^T & B_w \\ C_e R & -\gamma I_{n_e} & D_{ew} \\ B_w^T & D_{ew}^T & -\gamma I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{N}_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{N}_S & 0 \\ 0 & I_{n_e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_w & C_e^T \\ B_w^T S & -\gamma I_{n_w} & D_{ew}^T \\ C_e & D_{ew} & -\gamma I_{n_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{N}_S & 0 \\ 0 & I_{n_e} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.8)$$

où  $\mathbb{N}_R$  et  $\mathbb{N}_S$  sont des bases de noyaux de  $[B_u^T \ D_{eu}^T]$  et  $[C_y \ D_{yw}]$  respectivement.

Les trois inégalités sont affines en les variables  $R$ ,  $S$  et  $\gamma$ . La valeur  $\gamma_{min}$ , objet de la résolution du problème  $H_\infty$  standard, est obtenue en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\gamma, R=R^T, S=S^T} \gamma \quad \text{sous les contraintes (2.6), (2.7), (2.8)}$$

Ceci constitue un problème de minimisation d'un objectif linéaire sous contraintes LMI.

Il est à noter que les expressions intérieures des inégalités (2.6) et (2.7) dépendent uniquement des matrices  $A$ ,  $B_w$ ,  $C_e$  et  $D_{ew}$ . De même, les facteurs externes dépendent seulement des matrices  $B_u$ ,  $C_y$ ,  $D_{eu}$  et  $D_{yw}$ . Enfin, la condition (2.8) implique, par application du Lemme de Schur, que  $R > 0$  et  $S > 0$ .

Le résultat du problème  $H_\infty$  standard par LMI donne les matrices  $R$  et  $S$ . Elles sont obtenues par résolution du problème d'optimisation formulé précédemment [GA94], [IS94]. Le correcteur peut être construit sous forme de représentation d'état selon différentes manières qui seront détaillées au paragraphe 3.2.3.



### 2.1.3.2 Lien avec les équations de Riccati

L'objectif de ce paragraphe est de mettre en évidence le lien entre le résultat présenté dans le théorème 2.1.4 et la résolution du problème  $H_\infty$  standard par les équations de Riccati.

Afin de pouvoir établir une comparaison avec la solution réalisée par utilisation des équations de Riccati, il est nécessaire de supposer que les hypothèses  $H1$  à  $H4$  du paragraphe 2.1.2 sont vérifiées. Nous nous plaçons de plus dans le cadre des hypothèses simplificatrices  $H5$  –  $H6$ . Alors les matrices  $H_\infty$  et  $J_\infty$  du théorème 2.1.2 s'écrivent :

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_w B_w^T - B_u B_u^T \\ -C_e^T C_e & -A^T \end{bmatrix} \text{ et } J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2}C_e C_e^T - C_y C_y^T \\ -B_w^T B_w & -A \end{bmatrix}$$

On se place dans le cas où  $H_\infty$  et  $J_\infty$  appartiennent à  $\text{dom}(\text{Ric})$  qui est défini dans (1.12). En conséquence, les solutions respectives des équations de Riccati sont  $X_\infty := \text{Ric}(H_\infty)$  et  $Y_\infty := \text{Ric}(J_\infty)$  :

$$A^T X_\infty + X_\infty A + X_\infty (\gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T) X_\infty + C_e^T C_e = 0 \quad (2.9)$$

$$A^T Y_\infty + Y_\infty A^T + Y_\infty (\gamma^{-2} C_e C_e^T - C_y C_y^T) Y_\infty + B_w^T B_w = 0 \quad (2.10)$$

Pour comparer ces équations et les conditions d'existence du correcteur dans le théorème 2.1.4, il convient d'expliciter les inégalités du théorème 2.1.4. D'après les hypothèses données par  $H5$  –  $H6$ , on montre que :

$$\aleph_R = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D_{eu} B_u^T & C_e \end{bmatrix} \text{ et } \aleph_S = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D_{yw}^T C_y & B_w^T \end{bmatrix}$$

En développant (2.6), on obtient alors :

$$A\tilde{R} + \tilde{R}A^T + \tilde{R}C_e^T C_e \tilde{R} + \gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T < 0 \text{ avec } \tilde{R} = \gamma^{-1} R$$

En notant  $P = C_e^T C_e \geq 0$  et en supposant  $(C_e, A)$  observable, alors  $(A^T, P)$  est commandable et en appliquant le théorème 1.1.1 du chapitre 1, il existe une solution  $\tilde{R}_+ > \tilde{R}$  de l'équation de Riccati suivante :

$$A\tilde{R}_+ + \tilde{R}_+ A^T + \tilde{R}_+ C_e^T C_e \tilde{R}_+ + \gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T = 0 \quad (2.11)$$

telle que les valeurs propres de  $A^T + P\tilde{R}_+$  sont à partie réelle strictement positive. De plus,  $R > 0$  implique que  $\tilde{R} > 0$  et donc que  $\tilde{R}_+ > 0$ . On peut donc poser  $X = \tilde{R}_+^{-1} > 0$  puis réécrire (2.11) de la manière suivante :

$$XA + A^T X + X(\gamma^{-2}B_w B_w^T - B_u B_u^T)X + C_e^T C_e = 0 \quad (2.12)$$

La matrice  $A^T + C_e^T C_e X^{-1}$  a toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement positive donc la matrice :

$$A + (\gamma^{-2}B_w B_w^T - B_u B_u^T)X = -X^{-1}(A^T + C_e^T C_e X^{-1})X$$

a toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative,  $X$  est donc une solution stabilisante de l'équation (2.9).

Si l'hypothèse  $(C_e, A)$  observable n'est pas vérifiée, alors [GA94] ont montré qu'il est possible de trouver une solution définie positive de l'équation de Riccati (2.12).

Réciproquement, soit  $X_\infty := Ric(H_\infty) \geq 0$ , la solution de (2.12). Par argument de continuité [GA94],  $X_\infty$  peut être perturbé pour obtenir  $\hat{X} > X_\infty$  solution de l'inégalité suivante :

$$\hat{X}A + A^T \hat{X} + \hat{X}(\gamma^{-2}B_w B_w^T - B_u B_u^T)\hat{X} + C_e^T C_e < 0$$

Il vient donc  $\hat{X} > 0$  et en reprenant la démarche précédente en sens inverse, on obtient la LMI (2.6).

On démontre ensuite l'équivalence entre la LMI (2.7) et la condition *iii*) du théorème (2.1.2) de la même manière en posant  $\tilde{S} = \gamma^{-1}S$  et  $Y = \tilde{S}_+^{-1}$ .

Finalement, par utilisation du lemme (1.1.4) et la prise en compte de  $R > 0$  et  $S > 0$ , la LMI (2.8) est équivalente à l'une des deux conditions suivantes :

$$R - S^{-1} \geq 0 \iff \gamma\tilde{R} \geq \gamma^{-1}\tilde{S}^{-1}$$

Etant donné que  $\tilde{R}_+ > \tilde{R} > 0$  et que  $\tilde{S}^{-1} > \tilde{S}_+^{-1} > 0$ , on obtient :

$$\gamma\tilde{R}_+ > \gamma^{-1}\tilde{S}_+^{-1} > 0$$

soit :

$$\gamma X^{-1} > \gamma^{-1} Y > 0$$

Ce qui est équivalent à l'inégalité :

$$\gamma^2 Y^{1/2} X^{-1} Y^{-1/2} - I_n > 0$$

Les valeurs propres de la matrice  $Y^{-1/2} X^{-1} Y^{-1/2}$  sont donc strictement positives et vérifient :

$$\lambda_{\min}(Y^{-1/2} X^{-1} Y^{-1/2}) > \gamma^{-2} \iff \lambda_{\max}(Y^{1/2} X Y^{1/2}) < \gamma^2$$

Par ailleurs, comme  $X$  est une matrice régulière, les matrices  $XY$  et  $Y^{1/2} X Y^{1/2}$  ont des valeurs propres identiques. Les valeurs propres de la matrice  $XY$  sont donc réelles, positives et strictement inférieures à  $\gamma^2$ , ce qui signifie que :

$$\rho(XY) = \lambda_{\max}(XY) < \gamma^2$$

Ce qui est exactement la condition  $v)$  du théorème (2.1.2).

### 2.1.3.3 Avantage de la formulation

Dans la pratique, la résolution du problème  $H_\infty$  standard par  $\gamma$ -itération est plus aisée car moins coûteuse en temps de calcul. Le principal avantage de cette méthode réside dans sa faculté à prendre en compte des contraintes supplémentaires, en particulier concernant l'ordre du correcteur à synthétiser.

Il est également possible de considérer des contraintes impliquant une performance  $H_2$ , ou encore des placements de pôles ([Sch95], [GBA95], [GB95], [CG96]).

Ces types de problèmes sont connus pour ne pas avoir de solution analytique explicite. Pour cette raison, une formulation du problème sous forme LMI permet d'utiliser les techniques d'optimisation convexe pour les résoudre.

Dans ce mémoire, nous présenterons une application de synthèses de correcteur avec prise en compte d'une réduction d'ordre a priori et a posteriori. Les méthodes correspondantes seront présentées au chapitre 4.

## Chapitre 3

# Synthèse de correcteurs

## $H_\infty$ -LPV

Lorsque les paramètres d'un processus à contrôler varient fortement ou bien rapidement, la synthèse d'un correcteur fixe, même "robuste", ne permet pas de satisfaire pleinement les exigences du contrôle et s'avère donc insuffisante.

Il semble donc que dans ce cas l'utilisation de correcteurs qui varient en fonction de ces paramètres soit appropriée.

Après avoir présenté la méthodologie de synthèse de correcteurs  $H_\infty$ , notre but dans cette partie est d'explicitier l'obtention d'un correcteur séquencé en fonction d'un paramètre variant au cours du temps. Cette approche doit permettre, malgré la variation du paramètre, de préserver voire d'améliorer les propriétés de robustesse et de performance accessibles par la synthèse  $H_\infty$ . L'application à l'assistance au contrôle latéral semble se prêter particulièrement à ce type de commande puisque le système constitué du conducteur, de l'actionneur de direction et du véhicule évolue dans le temps au fur et à mesure qu'il se déplace sur la chaussée et qu'un paramètre variant naturel est la vitesse longitudinale.

### 3.1 Position du problème

Dans cette partie, nous présentons la méthodologie de synthèse visant à commander un processus pouvant s'écrire sous la forme d'un système linéaire à paramètres variants (LPV). La forme générale est la suivante :

$$P(\theta) : \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(\theta) & B_w(\theta) & B_u(\theta) \\ C_e(\theta) & D_{ew}(\theta) & D_{eu}(\theta) \\ C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) & D_{yu}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où :  $\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_p(t))^T$  est le vecteur de paramètres dépendant du temps. On suppose que chaque composante  $\theta_i(t)$  peut être mesurée en temps réel.

Cette hypothèse permet de chercher un correcteur  $K(\theta)$  ayant la même structure qu'en synthèse  $H_\infty$  mais avec une dépendance en  $\theta$  qui est supposé mesuré en temps réel :

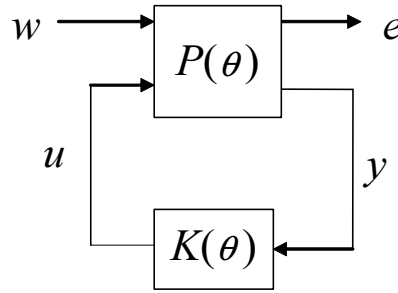


FIG. 3-1 – Système et correcteur dépendant de paramètres

Tout d'abord, il est indispensable de définir une mesure des performances à atteindre. Pour cette raison, on introduit  $L_2(\mathbb{R}^n)$ , l'ensemble des signaux  $s(t)$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^n$  dont la norme  $L_2$ , définie par :

$$\|s\|_2 := \sqrt{\int_0^\infty s(t)^T s(t) dt} \quad (3.2)$$

est bornée. Le gain  $L_2$  du système de la Figure 3-1 est alors défini par :

$$\gamma = \sup_{w(t) \in L_2} \frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} \quad (3.3)$$

La problématique envisagée consiste à déterminer un correcteur  $K(\theta)$  dépendant des paramètres qui assure la stabilité du système bouclé de la Figure 3-1 pour toute évolution de  $\theta(t)$ . Le système bouclé doit également avoir un gain  $L_2$  entre  $w$  et  $e$  inférieur à une valeur  $\gamma$  donnée.

## 3.2 Résolution du problème par approche polytopique

Dans ce paragraphe, la présentation de la résolution du problème par approche polytopique est présentée. Il s'agit d'expliciter la méthode que nous avons choisie pour synthétiser le correcteur séquentiel.

### 3.2.1 Définition du polytope

On suppose que chaque paramètre  $\theta_i(t)$  peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle de type  $[\underline{\theta}_i; \bar{\theta}_i]$ , le vecteur  $\theta(t)$  peut donc prendre n'importe quelle valeur dans un pavé de  $\mathbb{R}^p$ .

On appelle  $\pi_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^p$ , les sommets de ce pavé.

La Figure 3-2 schématise lorsque deux paramètres varient, le domaine de variation du vecteur  $\theta(t)$ .

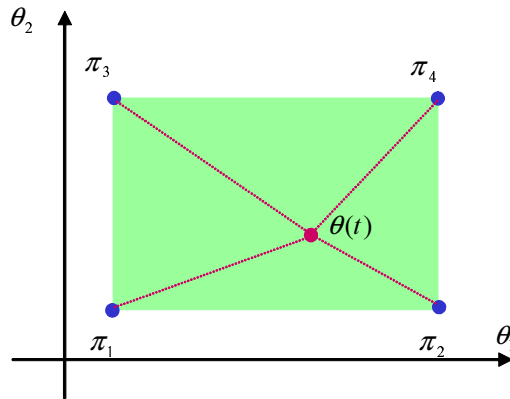


FIG. 3-2 – Domaine d'évolution du paramètres  $\theta(t)$  lorsque  $p = 2$

Si les équations d'état (3.1) du système à commander sont affines en  $\theta(t)$ , chaque matrice de la représentation d'état évolue dans un polytope (en fait ici un pavé) dont les sommets sont obtenus successivement en posant  $\theta(t) = \pi_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^p$ . Pour tout  $t$ ,  $\theta(t)$  est le barycentre des sommets  $\pi_i$  tel que :

$$\theta(t) = \sum_{i=1}^{2^p} \alpha_i(t) \pi_i ; \alpha_i(t) \geq 0 ; \sum_{i=1}^{2^p} \alpha_i = 1 \quad (3.4)$$

Compte tenu de ces hypothèses, les matrices de la représentation d'état

peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire des matrices correspondant aux sommets du polytope :

$$\left( \begin{array}{c|cc} A(\theta) & B_w(\theta) & B_u(\theta) \\ \hline C_e(\theta) & D_{ew}(\theta) & D_{eu}(\theta) \\ C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) & D_{yu}(\theta) \end{array} \right) = \sum_{i=1}^{2^p} \alpha_i \left( \begin{array}{c|cc} A(\pi_i) & B_w(\pi_i) & B_u(\pi_i) \\ \hline C_e(\pi_i) & D_{ew}(\pi_i) & D_{eu}(\pi_i) \\ C_y(\pi_i) & D_{yw}(\pi_i) & D_{yu}(\pi_i) \end{array} \right) \quad (3.5)$$

où  $e$  sont les sorties régulées,  $w$  les entrées extérieures, (par exemple les perturbations),  $u$  les commandes et  $y$  les mesures.

Le correcteur LPV a alors la forme suivante :

$$K(\theta) : \begin{pmatrix} \dot{x}_K(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ \hline C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_K(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

où les matrices de sa représentation d'état sont trouvées par la même combinaison linéaire :

$$\left( \begin{array}{c|c} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ \hline C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{array} \right) = \sum_{i=1}^{2^p} \alpha_i \left( \begin{array}{c|c} A_K(\pi_i) & B_K(\pi_i) \\ \hline C_K(\pi_i) & D_K(\pi_i) \end{array} \right) \quad (3.7)$$

### 3.2.2 Conditions de faisabilité

La faisabilité du problème dépend de l'application du théorème présenté dans [AGB95], [AG95]. Pour la suite, nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

H1)  $D_{yu}(\theta) = 0$  ou de façon équivalente  $D_{yu}(\pi_i) = 0$  pour  $i = 1, \dots, 2^p$

H2)  $B_u(\theta)$ ,  $C_y(\theta)$ ,  $D_{eu}(\theta)$  et  $D_{yw}(\theta)$  sont indépendantes de  $\theta$ , ou de façon équivalente :

$$B_u(\pi_i) = B_u, \quad C_y(\pi_i) = C_y, \quad D_{eu}(\pi_i) = D_{eu}, \quad D_{yw}(\pi_i) = D_{yw}, \quad i = 1, \dots, 2^p \quad (3.8)$$

H3) Pour toute évolution possible de  $\theta(t)$  dans le pavé de sommets  $\pi_i$ ,  $(A(\theta), B_u)$  est quadratiquement stabilisable et  $(C_y, A(\theta))$  est quadratiquement détectable, ou de manière équivalente il existe des matrices réelles symétriques  $X > 0$  et  $Y > 0$  satisfaisant respectivement les LMI suivantes :

$$N_u^T (A_i^T X + X A_i) N_u < 0, \quad i = 1, \dots, 2^p \quad (3.9)$$

$$N_y^T (A_i^T Y + Y A_i) N_y < 0, \quad i = 1, \dots, 2^p \quad (3.10)$$

où  $N_u$  et  $N_y$  constituent une base des noyaux de  $B_u^T$  et  $C_y^T$  respectivement.

La faisabilité du problème énoncé est testée grâce au théorème suivant [AGB95].

**Théorème 3.2.1.** *Compte tenu des hypothèses H1, H2, H3, il existe un correcteur stabilisant le système de la Figure 3-1 et assurant un gain  $L_2$  inférieur à  $\gamma$  pour toute évolution possible de  $\theta(t)$  dans le pavé de sommets  $\pi_i$  si et seulement si deux matrices symétriques  $R$  et  $S$  existent, et vérifient les trois inégalités matricielles suivantes :*

$$\begin{bmatrix} \aleph_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A(\pi_i)R + RA(\pi_i)^T & RC_e(\pi_i)^T & B_w(\pi_i) \\ C_e(\pi_i)R & -\gamma I_{n_e} & D_{ew}(\pi_i) \\ B_w(\pi_i)^T & D_{ew}(\pi_i)^T & -\gamma I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \aleph_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.11)$$

$$i = 1, \dots, 2^p$$

$$\begin{bmatrix} \aleph_S & 0 \\ 0 & I_{n_e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A(\pi_i)^T S + SA(\pi_i) & SB_w(\pi_i) & C_e(\pi_i)^T \\ B_w(\pi_i)^T S & -\gamma I_{n_w} & D_{ew}(\pi_i)^T \\ C_e(\pi_i) & D_{ew}(\pi_i) & -\gamma I_{n_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \aleph_S & 0 \\ 0 & I_{n_e} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

$$i = 1, \dots, 2^p$$

$$\begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.13)$$

où  $\aleph_R$  et  $\aleph_S$  constituent une base des noyaux de  $(B_u^T \ D_{eu}^T)$  et  $(C_y \ D_{yw})$  respectivement.

Les inégalités (3.11), (3.12), (3.13), sont les mêmes que celles du Théorème (2.1.4) qui formule le problème de synthèse  $H_\infty$ .

Il faut noter que les deux premières inégalités sont remplacées chacune par un système de  $2^p$  inégalités qui doivent être vérifiées simultanément



par la même matrice  $R$  ou  $S$ .

A la suite de la résolution de ce système d'inégalités matricielles linéaires, il faut construire les matrices  $A_K(\pi_i)$ ,  $B_K(\pi_i)$ ,  $C_K(\pi_i)$ ,  $D_K(\pi_i)$  pour chaque sommet  $\pi_i$ .

### 3.2.3 Reconstruction des correcteurs aux sommets $\pi_i$

Les correcteurs solutions du problème  $H_\infty$ -LPV par approche polytopique sont obtenus à partir des solutions  $R$  et  $S$  de la formulation LMI, soit en résolvant un problème d'optimisation matricielle, soit par des formules explicites. Ces techniques de reconstruction s'appliquent aussi bien dans le cas  $H_\infty$  que LPV.

Ces méthodologies sont développées dans ce paragraphe et ont été utilisées au cours de nos travaux. La première méthode s'avère être la plus appropriée dans le cadre de l'étude sous forme LMI. La seconde est parfois plus efficace, toutefois dans le cadre de l'application à l'assistance au contrôle latéral, lorsque les matrices  $R$  et  $S$  sont mal conditionnées et les matrices intervenant dans la résolution sont de grande taille, des problèmes numériques surviennent et ne permettent pas d'obtenir un correcteur LPV.

Supposons connues, pour une valeur de  $\gamma$  donnée par la résolution du problème  $H_\infty$ -LPV, des solutions  $R$  et  $S$  des LMI (3.11), (3.12), (3.13). Il faut d'abord construire les matrices  $E$  et  $N$  qui vérifient :

$$\begin{pmatrix} S & N \\ N^T & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & * \\ * & * \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.14)$$

Ces matrices sont obtenues en déterminant deux matrices  $U$  et  $V$  telles que  $UV^T = I - RS$ . Alors il vient :

$$\begin{pmatrix} S & V \\ V^T & -V^T R U^T{}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & U \\ U^T & -U^T S V^T{}^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.15)$$

Les matrices  $\Psi(\pi_i)$ ,  $P_{X_{bf}}(\pi_i)$  et  $Q(\pi_i)$  peuvent alors être formées. Elles ont pour expression :

$$\Psi(\pi_i) = \begin{pmatrix} A(\pi_i)^T S + S A(\pi_i) & A(\pi_i)^T N & S B_w(\pi_i) & C_e(\pi_i)^T \\ N^T A(\pi_i) & 0 & N^T B_w(\pi_i) & 0 \\ B_w(\pi_i)^T S & B_w(\pi_i)^T N & -\gamma I & D_{ew}(\pi_i)^T \\ C_e(\pi_i) & 0 & D_{ew}(\pi_i) & -\gamma I \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$P_{X_{bf}}(\pi_i) = \begin{pmatrix} N^T & E & 0 & 0 \\ B_u(\pi_i)^T S & B_u(\pi_i)^T N & 0 & D_{eu}(\pi_i)^T \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$Q(\pi_i) = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ C_y(\pi_i) & 0 & D_{yw}(\pi_i) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Le correcteur  $K$  est alors synthétisé en utilisant une des deux approches suivantes :

### Reconstruction par LMI

Connaissant les matrices  $\Psi(\pi_i)$ ,  $P_{X_{bf}}(\pi_i)$  et  $Q(\pi_i)$ , il faut maintenant résoudre l'inégalité matricielle (3.19) sur chaque sommet  $\pi_i$  :

$$\Psi(\pi_i) + P_{X_{bf}}^T(\pi_i)K(\pi_i)Q(\pi_i) + Q(\pi_i)^T K(\pi_i)^T P_{X_{bf}}(\pi_i) < 0 \quad (3.19)$$

où  $K(\pi_i) = \begin{pmatrix} A_K(\pi_i) & B_K(\pi_i) \\ C_K(\pi_i) & D_K(\pi_i) \end{pmatrix}$  définit la représentation d'état du correcteur. Cette inégalité est affine en  $K(\pi_i)$ .

L'étude des dimensions des matrices intervenant dans (3.19) montre que la dimension du correcteur  $n_K$  se déduit du nombre de colonnes de  $U$  et de  $V$ . Le Lemme de complétion assure que  $n_K \leq n$  et que  $\text{rang}(I - RS) = n_K$ . Dans le cas général,  $n_K = n$ . Dans le cas d'une synthèse avec contrainte d'ordre, on cherchera à réduire la dimension de  $\text{rang}(I - RS)$  [VC98].

### Reconstruction par formules explicites [IS94]

Dans certains cas, la LMI (3.19) est mal conditionnée et des solutions plus efficaces sont obtenues en utilisant les formules explicites selon la démarche suivante [IS94], [VC98] :

1. Reconstruction de  $P_{X_{bf}}(\pi_i)$
2. Formation des matrices  $\Psi(\pi_i)$ ,  $Q(\pi_i)$ ,  $P_{X_{bf}}^+(\pi_i)$  et  $P_{X_{bf}}^\perp(\pi_i)$ .  
 $P_{X_{bf}}^+(\pi_i)$  est la pseudo-inverse de  $P_{X_{bf}}(\pi_i)$ .  $P_{X_{bf}}^\perp(\pi_i)$  est une matrice de rang plein telle que  $P_{X_{bf}}(\pi_i)P_{X_{bf}}^\perp(\pi_i) = 0$
3. Sur chaque sommet  $\pi_i$ , choix de  $\varepsilon$  tel que,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_{max}$  avec :

$$\varepsilon_{max}^{-1} = \lambda_{max}[P_{X_{bf}}^+{}^T(\Psi - \Psi P_{X_{bf}}^\perp(P_{X_{bf}}^\perp{}^T \Psi P_{X_{bf}}^\perp)^{-1} P_{X_{bf}}^\perp{}^T \Psi)P_{X_{bf}}^+]$$

4. Sur chaque sommet  $\pi_i$ , calcul de :

$$\Phi = (\varepsilon^{-1} P_{X_{bf}}^T P_{X_{bf}} - \Psi)^{-1} > 0$$

5. On obtient finalement le correcteur  $K(\pi_i)$  par :

$$K(\pi_i) = -\varepsilon^{-1} P_{X_{bf}} \Phi Q^T (Q \Phi Q^T)^{-1}$$

Toutes les variables du  $2^{me}$  membre dépendent de  $\pi_i$  et  $K(\pi_i)$  s'écrit comme précédemment sous la forme :

$$K(\pi_i) = \left( \begin{array}{c|c} A_K(\pi_i) & B_K(\pi_i) \\ \hline C_K(\pi_i) & D_K(\pi_i) \end{array} \right)$$

On peut noter que la construction du correcteur possède un degré de liberté qui consiste à choisir le paramètre  $\varepsilon$ . Du choix de  $\varepsilon$  dépend la reconstruction du correcteur final  $K(\pi_i)$ . Il s'avère particulièrement important pour le calcul de  $\Phi$ , notamment lorsque les matrices manipulées sont de grandes tailles et mal conditionnées.

Le correcteur final est obtenu par la formule (3.7). Il dépend de l'évolution de  $\theta(t)$ , puisqu'à tout instant  $t$ , il faut déduire de  $\theta(t)$  les valeurs des coefficients  $\alpha_i$ , d'où l'on déduit les matrices du correcteur. Cette opération peut parfois être fastidieuse si le nombre de paramètres variant pris en compte dans la synthèse est élevé. Dans l'application à l'assistance au contrôle latéral, nous nous limitons aux paramètres de séquençement qui sont strictement indispensables à l'obtention de bonnes performances. Nous utilisons donc uniquement la vitesse longitudinale du véhicule.

En outre, cette approche garantit à la fois stabilité et performance. Toutefois, elle peut s'avérer conservatrice lorsque le paramètre  $\theta$  varie lentement. La stabilité du système en boucle fermée est alors prépondérante devant les performances escomptées.

Apkarian et Adams développe dans [AA98] une approche moins conservatrice. Cette stratégie borne la vitesse de variation des paramètres  $|\dot{\theta}|$ . Dans le cadre de l'assistance au contrôle latéral, ceci revient à tenir compte de l'accélération longitudinale maximale du véhicule. L'implantation de cette méthode n'a pas été réalisée dans ces travaux, toutefois elle fait partie des axes de développement de la stratégie de contrôle dans le cadre de l'application et constitue une perspective à explorer.

## Chapitre 4

# Synthèse d'un correcteur d'ordre réduit

Afin d'améliorer les performances des systèmes commandés, l'utilisation des méthodologies de synthèse modernes se développe à grand pas. Pour ce faire, il est indispensable de se ramener à des correcteurs d'ordre le plus faible possible. Il n'est d'ailleurs pas très satisfaisant d'avoir à utiliser un correcteur d'ordre élevé alors que le système est d'ordre beaucoup plus faible, et la présence d'un si grand nombre de modes dans le correcteur semble injustifiée. L'idéal serait bien entendu de pouvoir obtenir un correcteur d'ordre fixé a priori. De plus, éviter de grands ordres permet de s'affranchir des problèmes de temps de calcul, d'encombrement de mémoire et des problèmes numériques surgissant lorsqu'il y a des dynamiques très différentes.

Dans le cadre de cette Thèse, l'utilisation de la synthèse  $H_\infty$  possède l'avantage de prendre en compte de nombreux objectifs de synthèse mais il en résulte des correcteurs d'ordre élevé. C'est pourquoi la synthèse  $H_\infty$  s'est vue accompagner d'une intense recherche sur les correcteurs de complexité réduite [MJS79], [Moo81], [GOA97]. La réduction semble donc être la seule solution pour se ramener à un système d'ordre raisonnable.

Nous présentons dans ce qui suit deux directions :

- ◇ La réduction *a posteriori* avec la technique de réduction par agrégation ainsi que celle basée sur la troncature des valeurs singulières de Hankel.
- ◇ La réduction *a priori* avec la synthèse avec contrainte d'ordre.

## 4.1 Réduction a posteriori en boucle ouverte

Cette méthode de réduction consiste à remplacer un modèle initial par un modèle de taille plus petite. Le modèle réduit doit conserver les propriétés les plus importantes du système considéré. Ces techniques sont à ce jour bien connues.

Dans la suite, on note une représentation d'état minimale d'un système  $G(s)$  à réduire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) + D.u(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} A &\in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ C &\in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m} \end{aligned}$$

### 4.1.1 Réduction par agrégation modale

Cette méthode apparue dans les années 70 a pour objectif de conserver les modes jugés les plus significatifs du système à réduire [MJS79], [SMB79].

Le choix des modes du modèle agrégé qui appartiennent à l'ensemble des modes du modèle initial est très important pour la conservation des performances du système final.

Il existe deux méthodes pour déterminer les modes dominants.

- ◇ La première a pour but d'extraire et d'éliminer les modes très faiblement commandables ou très faiblement observables [UT71], [HS75]. Elle ne prend pas en compte le fait qu'une faible observation d'un mode peut être compensée par une forte excitation [MJS76].
- ◇ La seconde [Com78] permet de déterminer un modèle agrégé optimal au sens d'un critère quadratique, qui sera défini par la suite, et pour un horizon infini. L'optimisation concerne le choix des modes et conduit à définir un modèle réduit dont les sorties conservent les pondérations des modes retenus. La technique utilisée, proposée dans [MJS79], est sous-optimale par rapport à la précédente. Elle donne toutefois de très bons résultats.

Lorsqu'on utilise la méthode de réduction par agrégation modale, le correcteur initial doit être linéaire invariant, stable, complètement commandable et observable. Il est décrit par la représentation d'état (4.1), et il est possible de définir un modèle simplifié dont l'état  $z(t)$  est agrégé de  $x(t)$ . Sa représentation d'état est la suivante :

$$\begin{cases} z(t) = L.x(t) \\ \dot{z}(t) = F.z(t) + G.u(t) \\ \hat{y}(t) = H.x(t) + E.u(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $z \in \mathbb{R}^r$ ,  $\hat{y} \in \mathbb{R}^p$  et  $r < n$ .

Le spectre des valeurs propres de  $F$  doit être un sous-ensemble du spectre des valeurs propres de  $A$ . Le problème d'agrégation optimale consiste donc à définir les matrices  $(L, F, G, H, E)$  du modèle agrégé pour que l'approximation des sorties de (4.1) obtenu par  $\hat{y}(t)$  soit optimale au sens du critère de réduction :

$$J = \int_0^{+\infty} (y(t) - \hat{y}(t))^2 dt \quad (4.3)$$

#### 4.1.1.1 Stratégie du choix des modes

La méthodologie adoptée est fondée sur deux études successives qui utilisent :

- ◇ L'énergie associée à chaque mode
- ◇ Les propriétés du régime asymptotique

L'utilisation conjointe de ces deux informations permet de classer les modes par ordre d'importance décroissante.

#### 4.1.1.2 Sélection des modes à partir du régime transitoire

Pour simplifier la représentation de la méthode, on considère tout d'abord que le système est monovariable et que la matrice  $A$  a toutes ses valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  réelles et distinctes. A un changement de variable près par la matrice  $P$ , le système peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \Lambda.\xi(t) + \Gamma.u(t) \\ y(t) = \Omega.\xi(t) + D.u(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

Avec  $\Lambda = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\Gamma = P^{-1}B = [\gamma_1, \dots, \gamma_n]^T$  et  $\Omega = CP = [\omega_1, \dots, \omega_n]$ . Les  $\gamma_i$  et  $\omega_i$  étant des scalaires, l'énergie associée au mode  $\lambda_i$  pour la réponse impulsionnelle est définie comme suit :

$$w_{\lambda_i} = \int_0^\infty (\omega_i e^{\lambda_i t} \gamma_i)^2 dt \quad (4.5)$$

On peut donc sélectionner les modes dont les coefficients  $w_{\lambda_i}$  sont les plus grands. Ce premier choix peut ne pas être satisfaisant, parce qu'il ne tient pas compte du signe de la contribution de chaque mode. En effet, si deux modes voisins ont des énergies du même ordre de grandeur et apparaissent avec des signes opposés, alors leur contribution effective est négligeable. Il apparaît primordial d'étudier le terme croisé si l'on souhaite connaître le signe des contributions. On définit donc l'énergie croisée :

$$w_{\lambda_i, \lambda_j} = \int_0^\infty (\omega_i e^{\lambda_i t} \gamma_i)(\omega_j e^{\lambda_j t} \gamma_j) dt \quad (4.6)$$

Si ce terme croisé est de signe négatif, les deux modes peuvent être éliminés, dans le cas contraire, ils sont conservés. Afin de prendre en compte le signe du terme croisé, le classement initial des modes est modifié. Lorsque deux modes sont proches et ont des énergies de même importance, le signe de  $w_{\lambda_i, \lambda_j}$  est testé :

- ◇ S'il est positif le classement initial est inchangé.
- ◇ Sinon, les deux modes  $\lambda_i$  et  $\lambda_j$  sont éliminés.

En pratique, on considère que deux modes ont la même importance si :

$$\left| \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i} \right| < 10\% \text{ et } \left| \frac{w_{\lambda_i} - w_{\lambda_j}}{w_{\lambda_i}} \right| < 10\%$$

sous la condition que  $w_{\lambda_i} > 10\% w_{\lambda_j}$ .

Le mode  $\lambda_l$  est celui classé juste à la suite de  $\lambda_i$  et  $\lambda_j$ .

Les informations extraites de ce classement sont donc :

1. L'ordre dans lequel les modes doivent être retenus.
2. La dimension du modèle réduit.

En appliquant le critère quadratique (4.3), les matrices  $H$  et  $E$  doivent assurer l'égalité des régimes statiques. Ce problème est de type " moindres carrés " et en posant  $L = (I_m \ 0)$ , sa solution s'écrit :

$$H = \Omega X L^T (L X L^T)^{-1}$$

$$E = D - \Omega \Lambda^{-1} \Gamma + H F^{-1} G$$

avec  $X = |x_{ij}|$  et  $x_{ij} = \frac{\gamma_i \gamma_j}{-(\lambda_i + \lambda_j)}$

Dans le cas d'un correcteur ayant des valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_i$  et  $\bar{\lambda}_i$ , il suffit de considérer le couple  $(\lambda_i, \bar{\lambda}_i)$  comme une seule valeur propre  $\tilde{\lambda}_i$ , dont l'énergie est :

$$G_{\tilde{\lambda}_i} = G_{\lambda_i} + G_{\hat{\lambda}_i} + G_{\lambda_i \hat{\lambda}_i} + G_{\hat{\lambda}_i \lambda_i}$$

#### 4.1.1.3 Selection des modes à partir du régime permanent

L'étude énergétique des modes à partir des énergies  $w_{\lambda_i}$  et  $w_{\lambda_i, \lambda_j}$  définies sur le régime transitoire se révèle dans certains cas insuffisante parce qu'elle ne tient pas compte des contraintes asymptotiques. En effet, les modes rapides peuvent amener des discontinuités plus ou moins grandes. Quand un mode rapide conduit à une discontinuité très importante, il n'est pas négligeable même si son énergie en transitoire est faible comparative-ment aux autres. Si on ne tient pas compte des contraintes asymptotiques, des erreurs transitoires importantes peuvent survenir.

Afin de détecter ce type de situation, une étude de la contribution apportée par chaque mode au régime permanent est nécessaire. Les modes au moins dix fois plus rapides que le mode le plus lent sont uniquement analysés. Ceci peut s'obtenir en calculant pour chaque couple entrée-sortie  $(i, j)$  la matrice ligne décomposant le régime permanent sur la base modale :

$$V^{(i,j)} = \Omega^{(j)} \otimes \Lambda^{-1} \Gamma^{(i)} \quad (4.7)$$

où  $\Gamma^{(i)}$  est la  $i$ -ème colonne de  $\Gamma$ ,  $\Omega^{(j)}$  est la  $j$ -ème ligne de  $\Omega$ , et  $\otimes$  définit le produit terme à terme.

Afin de détecter une discontinuité significative, on calcule  $\alpha = \sum_E V^{(i,j)}(k)$  où  $E$  est l'ensemble des modes rapides. Si  $\alpha$  est du même ordre de grandeur que le régime permanent de la sortie alors il y a discontinuité.

Le classement des modes est alors réalisé et il est possible de choisir quel mode rapide peut être éliminé.

#### 4.1.2 Réduction par troncature des valeurs singulières de Hankel

La méthode de réduction présentée dans ce paragraphe est fondée sur les travaux exposés dans [Moo81].



Soit le correcteur initial  $K$  à réduire, asymptotiquement stable et représenté sous forme minimale, ses grammians de commandabilité et d'observabilité notés  $P$  et  $Q$  sont définis de la manière suivante :

$$P = \int_0^{+\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \text{ et } Q = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

Il faut noter que  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

On montre que le correcteur  $K$  est commandable (respectivement observable) si et seulement si  $P > 0$  (respectivement  $Q > 0$ ). De plus,  $P$  est l'unique solution définie positive de l'équation de Lyapunov :

$$P A^T + A P + B B^T = 0 \quad (4.8)$$

De même,  $Q$  est l'unique solution définie positive de l'équation de Lyapunov :

$$Q A + A^T Q + C^T C = 0 \quad (4.9)$$

**Définition 4.1.1.** On appelle *représentation équilibrée* une représentation d'état pour laquelle les deux grammians de commandabilité et d'observabilité sont égaux et diagonaux :

$$\tilde{P} = \tilde{Q} = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \text{ avec } \sigma_i > 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Les  $\sigma_i$  sont appelées *valeurs singulières de Hankel* du correcteur. Ils sont invariants par similitudes.

La forme équilibrée peut être obtenue par un changement de base de matrice  $T$ , qui diagonalise le produit matriciel  $PQ$ , et telle que les valeurs singulières de Hankel soient classées par ordre décroissant :

$$PQ = T \Sigma^2 T^{-1}, \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$

La représentation d'état équilibrée induite s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = (T^{-1} A T) \tilde{x} + (T^{-1} B) u = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u \\ y = (C T) \tilde{x} + D u = \tilde{C} \tilde{x} + D u \end{cases} \quad (4.10)$$

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que le système est mis sous cette forme.

La méthode de réduction basée sur la troncature des valeurs singulières de Hankel consiste à classer les modes suivant l'importance de leur contribution. La  $i$ ème valeur singulière de Hankel reflète le degré de commandabilité et d'observabilité du  $i$ ème état de la forme équilibrée. Plus une valeur singulière de Hankel est faible, moins l'état correspondant en coordonnées équilibrées est simultanément commandable et observable. Ces états à faibles valeurs de singulières de Hankel peuvent être alors tronqués.

L'état  $\tilde{x}$  est partitionné en  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$ , où  $\tilde{x}_1$  contient les  $r$  états à conserver et  $\tilde{x}_2$  les  $(n - r)$  états à éliminer.

La représentation d'état (4.10) devient alors :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + Du \end{cases} \quad (4.11)$$

On note  $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ .

Deux stratégies différentes peuvent être menées, suivant que le régime permanent doit être conservé ou non. Nous allons les exposer successivement avant d'analyser leurs propriétés.

#### 4.1.2.1 Troncature équilibrée directe

La troncature équilibrée directe consiste à ne garder que les matrices associées à la partie de l'état à conserver. La représentation d'état réduite est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{B}_1u \\ \hat{y} = \tilde{C}_1\tilde{x}_1 + Du \end{cases} \quad (4.12)$$

L'inconvénient majeur de cette technique est qu'elle ne conserve pas le gain statique.

#### 4.1.2.2 Troncature équilibrée avec conservation du gain statique

Le modèle réduit est obtenu en annulant la dérivée de  $\tilde{x}_2$ , d'où [SPG95] :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = (\tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21})\tilde{x}_1 + (\tilde{B}_1 - \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2)u \\ \hat{y} = (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21})\tilde{x}_1 + (D - \tilde{C}_2\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2)u \end{cases} \quad (4.13)$$

Le gain statique est cette fois préservé mais il est à noter que la matrice  $\tilde{A}_{22}$  doit être inversible.

#### 4.1.2.3 Quelques propriétés des troncatures équilibrées

La propriété fondamentale des deux méthodes présentées ci-dessus est que chacune donne un système réduit asymptotiquement stable si  $\sigma_r$  est strictement supérieure à  $\sigma_{r+1}$  [AL89].

De plus, la norme  $H_\infty$  de l'erreur d'estimation est bornée *a priori*, elle est connue avant d'effectuer la réduction. On a en effet [Glo84], [Enn84] :

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i = 2\text{trace}(\Sigma_2) \quad (4.14)$$

Dans le cas où certaines valeurs singulières de Hankel sont multiples, Glover [Glo84] a montré que chacune d'entre elles ne devait être comptée qu'une seule fois dans la somme précédente, ce qui diminue d'autant la borne sur l'erreur.

Cette propriété est très importante puisque la valeur de  $2\text{trace}(\Sigma_2)$  fournit une indication sur l'efficacité de la méthode pour un problème donné. Notons que la borne définie par (4.14) est atteinte dans le cas de systèmes dont les pôles et zéros sont réels, négatifs et alternés sur l'axe réel [Enn84]. Par contre, dans le cas d'un modèle à zéros et pôles imaginaires purs et alternés sur l'axe imaginaire, l'erreur réelle entre le correcteur et sa réduction équilibrée est très nettement inférieure à la valeur  $2\text{trace}(\Sigma_2)$  [Enn84]. Par ailleurs, il est prouvé que l'erreur de réduction ne peut jamais être rendue plus faible que la première valeur singulière de Hankel tronquée [AL89] :

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \geq \sigma_{r+1} \quad (4.15)$$

Finalement, cette méthode présente l'avantage d'être très systématique et demande peu d'effort à l'utilisateur dans la mesure où le seul moyen d'action est le choix du seuil au-dessous duquel les valeurs singulières de Hankel sont tronquées.

Les méthodes de réduction par agrégation modale et par troncature des valeurs singulières de Hankel dites de type "boucle ouverte" sont très utilisées et ont été une grande source d'inspiration pour les techniques de type "boucle fermée" [MG91], [Wor94].

## 4.2 Synthèse avec contrainte d'ordre par LMI

### 4.2.1 Méthodologie de la complémentarité conique (dite aussi méthode de la Trace)

La synthèse d'un correcteur d'ordre fixé consiste à chercher une loi de commande d'ordre  $r < n$  telle que :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{cases} \quad (4.16)$$

L'objectif est de trouver un correcteur stabilisant d'ordre réduit avec une contrainte au niveau des performances en terme de norme  $H_\infty$  :  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ .  $P$  et  $K$  sont donnés par la représentation du problème  $H_\infty$  standard de la Figure 2-2.

On rappelle que la matrice d'interconnexion  $P(s)$  de la Figure 2-2 est décrite par la représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  ;  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  ;  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  ;  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ .

De plus, on suppose que les hypothèses  $D_{yu} = 0$ ,  $(A, B_u)$  stabilisable et  $(C_y, A)$  détectable sont satisfaites.

La résolution du problème se base sur le théorème 2.1.4 auquel s'ajoute une contrainte sur le rang de la matrice  $RS - I_n$ .

On obtient le théorème suivant :

**Théorème 4.2.1.** *Il existe un correcteur d'ordre  $r$  tel que  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si il existe deux matrices symétriques  $R$  et  $S$  de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  satisfaisant le système LMI et la contrainte de rang suivants :*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{N}_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_e^T & B_w \\ C_e R & -\gamma I_{n_e} & D_{ew} \\ B_w^T & D_{ew}^T & -\gamma I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{N}_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{N}_S & 0 \\ 0 & I_{n_e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_w & C_e^T \\ B_w^T S & -\gamma I_{n_w} & D_{ew}^T \\ C_e & D_{ew} & -\gamma I_{n_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{N}_S & 0 \\ 0 & I_{n_e} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.20)$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} \leq n + r \iff \text{rang}(RS - I_n) \leq r \quad (4.21)$$

où  $\aleph_R$  et  $\aleph_S$  sont des bases de noyaux de  $[B_u^T \ D_{eu}^T]$  et  $[C_y \ D_{yw}]$  respectivement.

Si  $r \geq n$ , la contrainte (4.21) est toujours satisfaite. Lorsque  $r < n$ , la contrainte de rang fait perdre la convexité du problème.

Rappelons qu'à partir des matrices  $R$  et  $S$ , le correcteur solution du problème  $H_\infty$  peut être déterminé soit en résolvant une LMI, soit par des formules explicites. Ces méthodes de reconstruction sont explicitées au paragraphe 3.2.3.

#### 4.2.2 Algorithme de complémentarité conique

La résolution du problème défini par les contraintes LMI (4.18) à (4.20) avec réduction du rang de la matrice  $RS - I$  est proposée dans [GOA97]. L'objectif peut être formulé de la manière suivante :

$$\min_{R=R^T, S=S^T} \text{trace}(RS) \text{ sous des contraintes LMI de la forme } \begin{cases} F(R, S) \geq 0 \\ C(R, S) > 0 \end{cases}$$

Après optimisation, lorsque le résultat obtenu est  $n$  qui est l'ordre de la représentation d'état initiale, la matrice  $RS - I$  est la matrice nulle, ce qui permet de calculer un correcteur statique.

De manière générale, l'ordre du correcteur obtenu est égal au nombre de valeurs propres non nulles de  $RS - I$ .

On remarque également que le problème ci-dessus n'est pas linéaire. Il ne peut donc pas être résolu par les algorithmes d'optimisation sous contrainte LMI. Une méthode de linéarisation est donc utilisée. Au point  $(R_k, S_k)$ , la linéarisation de la fonction  $\text{trace}(RS)$  s'écrit :

$$\Phi_{lin}(R, S) = \text{constante} + \text{trace}(S_k R + R_k S) \quad (4.22)$$

L'algorithme minimise de manière itérative  $\Phi_{lin}(R, S)$ . La recherche d'un correcteur d'ordre minimal est finie lorsque les valeurs propres de  $RS - I$

n'évoluent plus de manière significative. L'ordre du correcteur est alors égal au nombre de valeurs propres qui peuvent être considérées comme non nulles, c'est à dire supérieures à une tolérance choisie *a priori*.

La solution est actualisée à partir des résultats des itérations courante et précédente. On utilise un facteur d'oubli  $\lambda \in [0, 1]$ , ce qui conduit à adopter l'algorithme suivant :

**Algorithme 4.2.1.**

i) Recherche d'un point initial  $(R_0, S_0)$ . Ceci consiste à déterminer un correcteur initial d'ordre plein.

S'il n'existe pas, on arrête

Sinon, on pose  $k = 0$  et on choisit le facteur d'oubli  $\lambda$ .

ii) Recherche de  $(R_{opt}, S_{opt})$  solution du problème LMI :

$$\min_{R=R^T, S=S^T} \text{trace}(S_k R + R_k S) \text{ sous les contraintes (4.18) à (4.20)}$$

iii) Actualisation des valeurs des variables  $R$  et  $S$  :

$$\begin{cases} R_{k+1} = \lambda R_{opt} + (1 - \lambda) R_k \\ S_{k+1} = \lambda S_{opt} + (1 - \lambda) S_k \end{cases} \quad (4.23)$$

iv) Si le critère d'arrêt est vérifié, Fin.

Sinon, on pose  $k = k + 1$  et on retourne en ii).

### 4.3 Synthèse avec contrainte d'ordre par LMI dans le cadre LPV

Cette approche consiste à reprendre la méthodologie de synthèse par approche polytopique développée dans le paragraphe 3.2 tout en imposant *a priori* l'ordre du correcteur qui doit être séquencé.

D'après les théorèmes 3.2.1 et 4.2.1, le problème de synthèse consiste à résoudre le système LMI et la contrainte de rang suivants :

$$\begin{bmatrix} \aleph_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A(\pi_i)R + RA(\pi_i)^T & RC_e(\pi_i)^T & B_w(\pi_i) \\ C_e(\pi_i)R & -\gamma I_{n_e} & D_{ew}(\pi_i) \\ B_w(\pi_i)^T & D_{ew}(\pi_i)^T & -\gamma I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \aleph_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.24)$$

$$i = 1, \dots, 2^p$$

$$\begin{bmatrix} \aleph_S & 0 \\ 0 & I_{n_e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A(\pi_i)^T S + SA(\pi_i) & SB_w(\pi_i) & C_e(\pi_i)^T \\ B_w(\pi_i)^T S & -\gamma I_{n_w} & D_{ew}(\pi_i)^T \\ C_e(\pi_i) & D_{ew}(\pi_i) & -\gamma I_{n_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \aleph_S & 0 \\ 0 & I_{n_e} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.25)$$

$$i = 1, \dots, 2^p$$

$$\begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.26)$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} \leq n + r \iff \text{rang}(RS - I_n) \leq r \quad (4.27)$$

où  $\aleph_R$  et  $\aleph_S$  constituent une base des noyaux de  $(B_u^T \ D_{eu}^T)$  et  $(C_y \ D_{yw})$  respectivement.

Pour la résolution, l'algorithme 4.2.1 est adopté, en utilisant les contraintes (4.24) à (4.27).

## **Chapitre 5**

# **Analyse de Stabilité des Systèmes Incertains**

### **5.1 Introduction**

Les systèmes industriels actuels sont de plus en plus complexes. Dans l'objectif d'être commandé, ils sont modélisés à un certain nombre d'incertitudes près. Ces incertitudes sont constituées par exemple, des dynamiques négligées et des paramètres à valeur mal connue. Pour analyser le comportement de ces systèmes, face à ces incertitudes, il est usuel de formuler directement le problème de façon à extraire les inconnues. En effet, l'étude du comportement du modèle mathématique représentatif du système étudié est rendue plus aisée.

Par ailleurs, l'outil mathématique qui permet de mettre en oeuvre une technique d'analyse ou de synthèse ne peut être appliqué sans mettre en balance la précision du modèle utilisé et la charge de calcul numérique engagée. Il convient donc de rechercher un bon compromis entre ces deux facteurs, par exemple en limitant la prise en compte des incertitudes à celles qui sont les plus pénalisantes ou en utilisant des algorithmes moins performants mais plus rapides.

### **5.2 Représentation générale par LFT**

Le formalisme des Transformations Fractionnaires Linéaires (en anglais : Linear Fractional Transformation) constitue un bon compromis



entre les exigences d'extraction et de manipulation de propriétés mathématiques et le temps de calcul.

La Figure 5-1 représente le système de fonction de transfert :

$$T_{yw}(s) := H_{yw}(s) + H_{y\nu_\Delta}(s)\Delta(s)(I - H_{z_\Delta\nu_\Delta}(s)\Delta(s))^{-1}H_{z_\Delta w}(s)$$

avec :

$$H(s) := \begin{bmatrix} H_{z_\Delta\nu_\Delta}(s) & H_{z_\Delta w}(s) \\ H_{y\nu_\Delta}(s) & H_{yw}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^{(p_1+p_2) \times (m_1+m_2)} \quad (5.1)$$

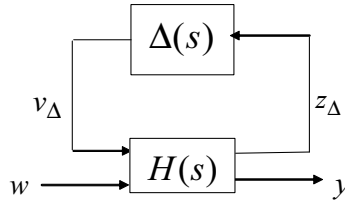


FIG. 5-1 – Schéma général d'étude de la robustesse de la stabilité

Ce chapitre a pour principal objectif de se focaliser sur la problématique d'analyse de la robustesse de la stabilité.  $\Delta(s)$  contient toutes les incertitudes considérées dans le modèle.

Dans l'étude menée, la structure LFT est envisagée dans le cadre linéaire bien qu'elle puisse être adoptée pour prendre en compte certaines non-linéarités.

Il convient donc de présenter les deux grandes classes d'incertitudes de modèle :

- ◇ Les incertitudes paramétriques. Elles interviennent sur la valeur des paramètres réels.
- ◇ Les incertitudes dynamiques. Elles sont liées à des phénomènes physiques mal connus ou négligés.

Compte tenu des incertitudes intervenant dans le modèle, il convient à présent de les extraire. Cette opération peut s'avérer délicate. Le degré de complexité de cette manipulation dépend de la taille du bloc d'incertitudes  $\Delta(s)$ . La finalité consiste en l'obtention d'une représentation minimale en les incertitudes.

Une façon alternative de considérer la question consiste à effectuer deux étapes. La première doit extraire les incertitudes sans rechercher la minimalité. Chaque bloc élémentaire est représenté sous forme LFT. Puis, ils sont assemblés de manière à obtenir finalement une LFT. La stratégie d'interconnexion est obtenue en appliquant des opérations sur les LFT élémentaires [Sco97], [LTBS93a]. La deuxième étape consiste finalement à réduire le schéma global. Plusieurs méthodes sont envisageables. On peut citer la technique appelée approche 1-D. Elle est introduite par Lambrechts dans [LTBS93b]. D'Andrea et Beck ont également proposé une approche fondée sur la décomposition n-D de Kalman [DK97], [BD97], [BD99]. Cette approche généralise la réduction 1-D fondée sur les sous-espaces gouvernables et observables. Il convient maintenant de définir plus précisément les Transformations Fractionnaires Linéaires.

Si  $H$  est une matrice complexe partitionnée selon 5.1, alors la LFT supérieure, désignée par  $u$  pour *upper*, est définie par :

$$\mathcal{F}_u(H, \Delta) = H_{22} + H_{21}\Delta(I - H_{11}\Delta)^{-1}H_{12}$$

où  $\Delta \in \mathcal{C}^{m_1 \times p_1}$ .

Si  $I - H_{11}\Delta$  est inversible, la LFT est bien posée. Il faut noter que  $y = \mathcal{F}_u(H, \Delta)w$ .

De manière similaire, on définit les Transformations Fractionnaires Linéaires inférieures, désignées par  $l$  pour *lower*.

$$\mathcal{F}_l(H, \Delta) = H_{11} + H_{12}\Delta(I - H_{22}\Delta)^{-1}H_{21}$$

On définit également ici le produit étoile de Redheffer qui sera utilisé lors de la mise en oeuvre de la  $\nu$ -analyse.

**Définition 5.2.1.** *Produit étoile de Redheffer*

*Le produit étoile de Redheffer ou produit de Redheffer de la matrice de transfert  $H(s)$  partitionnée en 4 blocs :*

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

*par la matrice de transfert  $G(s)$  partitionnée en 4 blocs :*

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

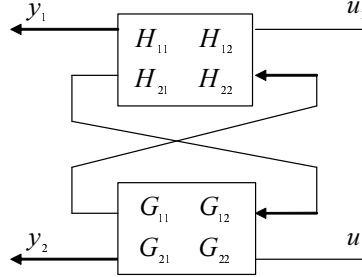


FIG. 5-2 – Définition du produit étoile de Redheffer

noté  $H(s) \star G(s)$  est défini par la matrice de transfert suivante :

$$H \star G = \begin{bmatrix} H_{11} + H_{12}G_{11}(I - H_{22}G_{11})^{-1}H_{21} & H_{12}(I - G_{11}H_{22})^{-1}G_{12} \\ G_{21}(I - H_{22}G_{11})^{-1}H_{21} & G_{22} + G_{21}H_{22}(I - G_{11}H_{22})^{-1}G_{12} \end{bmatrix}$$

Pour alléger l'écriture, on a éliminé la variable de Laplace  $s$ .

La matrice de transfert  $H \star G$  correspond à la fonction de transfert qui lie les signaux d'entrée  $u_1$  et  $u_2$ , aux signaux de sortie  $y_1$  et  $y_2$  représentés sur la Figure 5-2.

Dans le cas d'un système linéaire décrit par une représentation d'état dont les matrices  $A(\theta)$ ,  $B(\theta)$ ,  $C(\theta)$ ,  $D(\theta)$  dépendent rationnellement du vecteur de paramètres  $\theta$ , il est possible de concevoir une modélisation dans laquelle les paramètres sont placés dans le bloc  $\Delta$ . Alors la matrice restante  $H$  décrit un système linéaire invariant dans le temps [ZDG96]. De plus, la matrice  $\Delta$  est diagonale.

Ayant présenté la structure générale permettant d'élaborer une analyse de stabilité, on s'intéresse, dans le paragraphe suivant, à l'outil mathématique qui permet cette étude.

### 5.3 Valeur singulière structurée

La mise sous forme LFT du système permet de rassembler les différentes sources d'incertitudes de modèle dans la matrice  $\Delta(s)$ . Sa structure générale peut être définie de la manière suivante :

**Définition 5.3.1.**

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \text{diag}\{\Delta_1(s), \dots, \Delta_q(s), \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}, \varepsilon_1 I_{c_1}, \dots, \varepsilon_c I_{c_c}\} \\ \Delta_i(s) &\in \mathcal{RH}_\infty; \delta_i \in \mathbb{R}; \varepsilon_i \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad (5.2)$$

De plus les conditions de normalisation suivantes sont en général adoptées :

$$(\|\Delta_i(s)\|_\infty < 1 ; \delta_i \in ]-1; +1[ ; |\varepsilon_i| < 1) \iff (\|\Delta(s)\|_\infty < 1) \quad (5.3)$$

La matrice  $\Delta(s)$  est donc constituée de  $q$  matrices de transfert stables de structure quelconque, de  $r$  blocs réels dit "scalaires répétés", et de  $c$  scalaires complexes répétés. On dit que les scalaires  $\delta_i$  (respectivement  $\varepsilon_i$ ) sont répétés  $r_i$  fois (respectivement  $c_i$  fois), pour tenir compte de l'incertitude correspondante.

On définit de plus, l'ensemble  $\underline{\Delta}$  des matrices complexes possédant la même structure que  $\Delta(s)$  :

$$\underline{\Delta} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta \in \mathcal{C}^{k \times k} ; \Delta = \text{diag}\{\Delta_1, \dots, \Delta_q, \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}, \varepsilon_1 I_{c_1}, \dots, \varepsilon_c I_{c_c}\} \\ \Delta_i \in \mathcal{C}^{k_i \times k_i} ; \delta_i \in \mathbb{R} ; \varepsilon_i \in \mathbb{C} \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

Soit  $M \in \mathcal{C}^{k \times k}$  une matrice quelconque, la *valeur singulière structurée* de  $M$  relative à l'ensemble  $\underline{\Delta}$  est définie par :

**Définition 5.3.2.**

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{\Delta}}(M) &:= (\inf_{\Delta \in \underline{\Delta}} (\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - \Delta M) = 0))^{-1} \\ \mu_{\underline{\Delta}}(M) &:= 0 \text{ si } \forall \Delta \in \underline{\Delta} \det(I - \Delta M) \neq 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

L'interprétation de cette définition de la valeur singulière structurée consiste à noter que  $\mu_{\underline{\Delta}}(M)$  est l'inverse de la plus petite norme de la matrice  $\Delta$  pour laquelle le système  $M$  linéaire en  $v_\Delta, z_\Delta$  tel que :

$$\begin{cases} v_\Delta = \Delta z_\Delta \\ z_\Delta = M v_\Delta \end{cases}$$

et représenté sur la Figure 5-3 devient singulier.

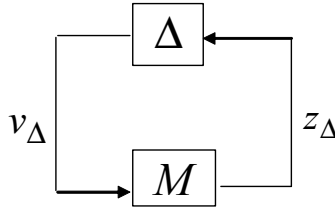


FIG. 5-3 – Analyse de la singularité par la valeur singulière structurée

## 5.4 Calcul de la valeur singulière structurée

Le calcul de la valeur singulière structurée est en général un problème difficile. Les quelques travaux et résultats menés dans ce domaine découlent principalement du Théorème du Petit Gain 2.1.1.

Il existe plusieurs bornes supérieures. La plus grossière est facile à calculer tandis que la plus fine nécessite des méthodes de minimisation sous contraintes plus fastidieuses et plus coûteuses en temps.

### 5.4.1 Première borne supérieure de la valeur singulière structurée

Supposons que  $\underline{\Delta}_1$  et  $\underline{\Delta}_2$  soient deux ensembles de matrices complexes telles que  $\underline{\Delta}_1 \subset \underline{\Delta}_2$ . Cela signifie que la structure prise en compte dans  $\underline{\Delta}_1$  est plus restreinte que celle de  $\underline{\Delta}_2$ . D'après la définition 5.3.1, il vient donc :

$$\mu_{\underline{\Delta}_1}(M) \leq \mu_{\underline{\Delta}_2}(M) \quad (5.6)$$

Une borne supérieure de  $\mu_{\underline{\Delta}_2}(M)$  est donc aussi une borne supérieure de  $\mu_{\underline{\Delta}_1}(M)$ .

La première borne supérieure est définie en considérant  $\Delta$  comme une matrice complexe pleine. On obtient alors :

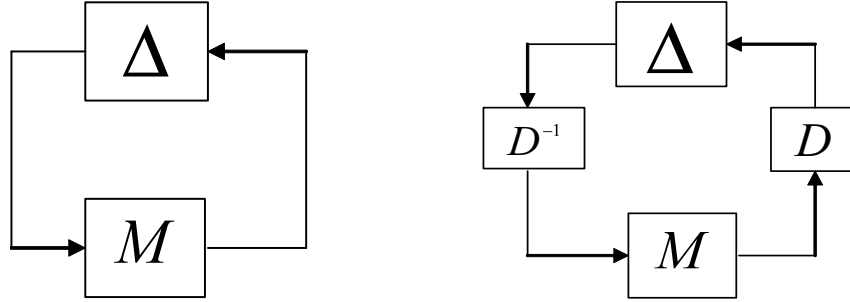
$$\forall M \in \mathcal{C}^{k \times k} \quad \mu_{\underline{\Delta}}(M) \leq \bar{\sigma}(M) \quad (5.7)$$

### 5.4.2 Deuxième borne supérieure de la valeur singulière structurée

Pour définir une seconde borne supérieure, on introduit un ensemble  $\underline{D}$  de matrices  $D$  qui commutent avec toute matrice  $\Delta$  de  $\underline{\Delta}$ . Les deux schémas de la Figure 5-4 sont alors équivalents.

Les matrices  $D$  sont interprétées comme des facteurs d'échelle dont le but est de minimiser le pessimisme de (5.7) [FTD91], [YND95].

L'ensemble  $\underline{D}$  est défini de la manière suivante :

FIG. 5-4 – Prise en compte des facteurs d'échelle  $D$ 

$$\underline{D} = \left\{ \begin{array}{l} D = \text{diag}\{d_1 I_{k_1}, \dots, d_q I_{k_q}, D_1, \dots, D_r, D'_1, \dots, D'_c\} \\ d_i \in \mathbb{R} \ d_i > 0 \\ D_i = D_i^* > 0 \in \mathcal{C}^{r_i \times r_i} \\ D'_i = D_i'^* > 0 \in \mathcal{C}^{c_i \times c_i} \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

L'ensemble  $\underline{D}$  est déduit de l'ensemble  $\underline{\Delta}$ . Il est formé de matrices définies positives. Chaque bloc plein  $\Delta_i$  est substitué par un scalaire répété positif. Puis, chaque scalaire répété réel ou complexe de  $\Delta$  devient une matrice pleine définie positive. De la sorte, les matrices  $\Delta$  et  $D$  commutent, ce qui permet de définir une deuxième borne supérieure de la valeur singulière structurée :

$$\mu_{\underline{\Delta}}(M) \leq \min_{D \in \underline{D}} \bar{\sigma}(DPD^{-1}) \quad (5.9)$$

Il est à noter que la seconde borne supérieure de la valeur singulière structurée ne tient pas compte du fait que les scalaires répétés peuvent être réels ou complexes. Afin de pouvoir considérer ce cas, on est amené à définir un nouvel ensemble de matrices qui va permettre de caractériser une troisième borne supérieure de la valeur singulière structurée.

### 5.4.3 Troisième borne supérieure de la valeur singulière structurée

Pour prendre en compte le fait que les  $\delta_i$  sont réels, on définit l'ensemble de matrices  $\underline{G}$  :

$$\underline{G} = \left\{ \begin{array}{l} G = \text{diag}\{0_{k_1}, \dots, 0_{k_q}, G_1, \dots, G_r, 0_{c_1}, \dots, 0_{c_c}\} \\ G_i = G_i^* \in \mathcal{C}^{r_i \times r_i} \end{array} \right\} \quad (5.10)$$

Les matrices  $G$  de l'ensemble  $\underline{G}$  sont hermitiennes. La structure d'une matrice  $G$  est telle que à tout bloc complexe plein ou contenant un scalaire complexe répété de  $\Delta$  est associée une matrice nulle. Puis, on associe aux blocs scalaires répétés de  $\Delta$  une matrice hermitienne pleine.

Les matrices de  $\underline{G}$  et de  $\underline{\Delta}$  vérifient la propriété :  $G\Delta = \Delta^*G$ .

Selon les définitions des ensembles,  $\underline{G}$  et  $\underline{\Delta}$ , il est possible de caractériser une troisième borne supérieure de la valeur singulière structure. Celle-ci est alors plus fine. Elle est obtenue par résolution d'un problème LMI dont la formulation est la suivante :

$$\mu_{\underline{\Delta}}(M) \leq \beta^* \quad (5.11)$$

avec  $\beta^* = \min_{D \in \underline{D}, G \in \underline{G}} \beta$  sous les contraintes :

$$\begin{cases} \beta \geq 0 \\ P^*DP + j(GP - P^*G) - \beta^2 D \leq 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Pour  $\beta$  fixé, la seconde inégalité de (5.12) est une LMI en  $D$  et  $G$ , alors que pour  $D$  et  $G$  fixés,  $\beta$  est obtenu par un calcul de valeur propre.

## 5.5 Analyse de robustesse par $\mu$ -analyse

L'objectif de l'analyse de robustesse par la  $\mu$ -analyse consiste, dans le cas d'un système LTI soumis à des incertitudes structurées et stationnaires, à calculer la plus petite incertitude au sens de la norme  $H_\infty$  qui déstabilise le système.

La  $\mu$ -analyse se fonde sur un Théorème [ZDG96], [Doy85], qui découle du Théorème du Petit Gain et dont voici l'énoncé :

**Théorème 5.5.1.** *Si  $H(s)$  n'a que des pôles à partie réelle négative, le système de la Figure 5-1 est stable pour toute incertitude  $\Delta(s)$  du type (5.2) telle que  $\|\Delta(s)\|_\infty < \alpha$  si et seulement si :*

$$\forall \omega \quad \mu_{\underline{\Delta}}(H_{11}(j\omega)) \leq \frac{1}{\alpha} \quad (5.13)$$

En pratique, l'analyse de robustesse doit déterminer une borne supérieure de la valeur singulière structurée du système interconnecté en fonction de la pulsation  $\omega$ . Alors, l'inverse de la norme  $H_\infty$  de la plus petite incertitude de  $\underline{\Delta}$  qui déstabilise le système est donnée par le maximum de la borne supérieure de la valeur singulière structurée. En général, il faut

choisir un intervalle de pulsations  $\omega$  suffisamment riche puis calculer une borne supérieure de  $\mu_{\underline{\Delta}}(H_{11}(j\omega))$  pour chaque  $\omega$ . Le réel positif  $\bar{\mu}$  recherché est la valeur la plus élevée calculée.

Lorsque la matrice  $\Delta(s)$  contient des incertitudes réelles  $\delta_i$ , la stabilité du système est garantie pour tout  $\delta_i$  de valeur absolue inférieure ou égale à  $\frac{1}{\bar{\mu}}$ . A chaque paramètre incertain est associé un intervalle admissible.

## 5.6 Robustesse des marges de Stabilité

Les marges de stabilité peuvent être assurées en introduisant des incertitudes complexes en entrée ou en sortie du système comme le présente la Figure 5-5.

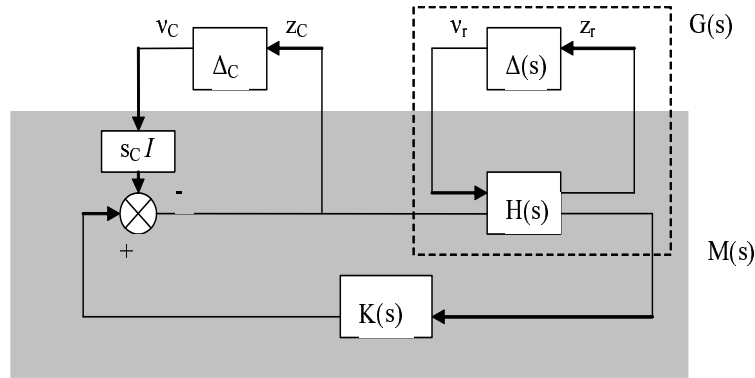


FIG. 5-5 – Incorporation d'incertitudes complexes en entrée du système

Dans cette représentation où des incertitudes complexes sont introduites en entrée du système,  $\Delta(s)$  symbolise les incertitudes physiques,  $\Delta_c$  est une matrice complexe et  $s_c \in \mathbb{R}$ . La prise en compte des deux types d'incertitudes conduit à définir un ensemble  $\underline{\Delta}^*$  qui sert à déterminer la valeur singulière structurée. Cet ensemble est définie de la manière suivante :

$$\underline{\Delta}^* = \{\Delta^* = \text{diag}\{\Delta, \Delta_c\}; \Delta \in \underline{\Delta}; \Delta_c \in \mathcal{C}^{n_u \times n_u}\} \quad (5.14)$$

$\underline{\Delta}$  est défini selon (5.4) et on suppose que :

$$\forall \omega \mu_{\underline{\Delta}^*}(M(j\omega)) \leq \bar{\mu} \quad (5.15)$$

où  $M(s)$  est défini sur la Figure 5-5.

Alors le système de la Figure 5-5 est stable pour tout  $\Delta(s)$  de type 5.2 tel



que  $\|\Delta(s)\|_\infty < \frac{1}{\bar{\mu}}$ , et pour tout  $\Delta_c$  tel que  $\|\Delta_c\|_\infty < \frac{1}{\bar{\mu}}$ .

Si on note  $Z_c(s)$ , le transfert entre la sortie et l'entrée de l'incertitude complexe, il a alors pour expression :

$$Z_c(s) = -s_C(I - K(s)G(s))^{-1}V_C(s) = -s_C S(s)V_C(s) \quad (5.16)$$

$S(s)$  est la fonction de sensibilité du système en entrée.

En appliquant le théorème du petit gain 2.1.1, on obtient le résultat suivant. Pour tout  $\Delta(s)$  de type (5.2) tel que  $\|\Delta(s)\|_\infty < \frac{1}{\bar{\mu}}$ ,  $S(s)$  a une norme  $H_\infty$  inférieure à  $\bar{\mu}$  donc :

$$\forall \omega \quad \|s_C(I - K(j\omega)G(j\omega))^{-1}\|_\infty \leq \bar{\mu} \quad (5.17)$$

Dans le cas monovarié, la quantité  $|1 - K(j\omega)G(j\omega)|$  est la distance entre un point du lieu de Nyquist et le point critique de coordonnées  $(-1, 0)$ . Le minimum de cette quantité est la marge de module. Donc, la marge de module d'un système monovarié est au moins égale à  $\frac{s_C}{\bar{\mu}}$ , pour toutes les incertitudes physiques de type (5.2) et telles que  $\|\Delta(s)\|_\infty < \frac{1}{\bar{\mu}}$ .

Dans le cas multivarié, la norme  $H_\infty$  de  $S(s)$  permet de définir des marges de gains ou de phases [LSA81]. Elles sont valables pour toutes les incertitudes physiques de type 5.2 telles que  $\|\Delta(s)\|_\infty < \frac{1}{\bar{\mu}}$ . Les matrices  $\Delta_c$  sont alors choisies sans structure particulière.

## 5.7 Remarques sur l'utilisation de la $\mu$ -analyse

- ◇ Si le modèle du système utilisé est affine en les paramètres incertains, l'extraction des incertitudes peut être effectuée de façon systématique en utilisant la méthode proposée par Morton [Mor85],[ZDG96]. Par ailleurs, dans le cas où le modèle est non affine, il n'existe pas de stratégie définitive dans la mesure où rien ne garantit que la matrice des incertitudes  $\Delta(s)$  soit minimale. Plusieurs algorithmes sont proposés par [BC92],[LTBS93a],[CM94],[Bec94], [Fon95], [DÖL01].
- ◇ Dans le cas où la matrice  $\Delta(s)$  incorpore des incertitudes réelles, il arrive que  $\mu_\Delta(H_{11}(j\omega))$  soit une fonction discontinue de la fréquence. Par exemple, tel peut être le cas lorsque les variations paramétriques sont telles qu'un pôle traverse l'axe imaginaire à une fréquence

fixe. De plus, il arrive que l'analyse de robustesse tienne compte d'incertitudes sur des modes de résonance très faiblement amortis. La courbe de  $\mu_{\Delta}(H_{11}(j\omega))$  présente alors des pics localisés très fins. La recherche du majorant  $\bar{\mu}$  est alors délicate si elle est réalisée à l'aide d'un simple échantillonnage en fréquence. Elle peut en effet engendrer une sous-estimation importante du maximum de  $\mu_{\Delta}(H_{11}(j\omega))$ . Les conclusions concernant la stabilité du système s'en trouveraient donc erronées.

- ◇ Deux approches sont présentées dans la suite de ce chapitre pour remédier à ce problème. La première, proposée pour la première fois par Sideris [Sid92] et développée par [Hel95] et [DF95] consiste à considérer la fréquence comme un paramètre incertain, et à l'intégrer à l'analyse de robustesse. Toujours dans l'optique de réaliser la suppression de l'échantillonnage en fréquence Magni et Döll [MD95] ont proposé une méthode qui utilise des facteurs d'échelle calculés pour une fréquence donnée afin de garantir la stabilité du système sur un intervalle complet. Les bornes de cet intervalle sont déterminées par un calcul de valeurs propres.

## 5.8 Suppression de l'échantillonnage en fréquence

L'élimination de l'échantillonnage en fréquence est fondée sur l'idée que  $\omega$  peut être considéré comme un paramètre incertain. Il est intégré dans l'analyse de robustesse. Cette approche est connue sous le nom de  $\nu$ -analyse où  $\nu$  est la valeur singulière structurée dissymétrique. Une application est notamment développée dans [FGD98].

### 5.8.1 Analyse de robustesse par $\nu$ -analyse

Soit une représentation d'état  $(A, B, C, D)$  d'ordre  $n$  du système  $M(s) = H_{z_{\Delta}\nu_{\Delta}}(s)$  de la Figure 5-1. Sous forme LFT, ce système peut s'écrire de la manière suivante :

$$M(s) = D + C(sI_n - A)^{-1}B = D + C \frac{1}{s} I_n (I_n - A \frac{1}{s} I_n)^{-1} B = \mathcal{F}_u \left( \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \frac{1}{s} I_n \right) \quad (5.18)$$

De plus, si l'on suppose que la pulsation  $\omega$  appartient à l'intervalle  $[\omega_1; \omega_2]$  ( $\omega_1$  peut être nul et  $\omega_2$  infini), et en posant  $s = j\omega$ , il est possible d'exprimer  $\frac{1}{sI_n}$  sous forme LFT :

$$\frac{1}{j\omega}I_n = \mathcal{F}_u(N_{(\omega_1; \omega_2)}, \delta I_n) \quad \delta \in [-1; +1] \quad (5.19)$$

avec :

$$N_{(\omega_1; \omega_2)} = \begin{bmatrix} -aI_n & bI_n \\ jcI_n & -jdI_n \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} a = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_1\omega_2} \\ b = c = \frac{\sqrt{2(\omega_2 - \omega_1)(1 + \omega_1)(1 + \omega_2)}}{\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_1\omega_2} \\ d = \frac{\omega_1 + \omega_2 + 2}{\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_1\omega_2} \end{cases} \quad (5.20)$$

En utilisant la LFT (5.18), le problème d'analyse de stabilité peut être représenté grâce au schéma courant de la  $\mu$ -analyse qui apparaît sur la Figure 5-6.

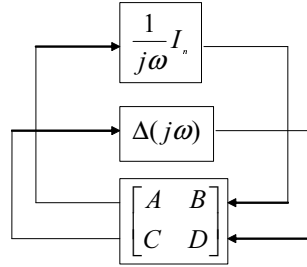


FIG. 5-6 – Schéma de la  $\mu$ -analyse

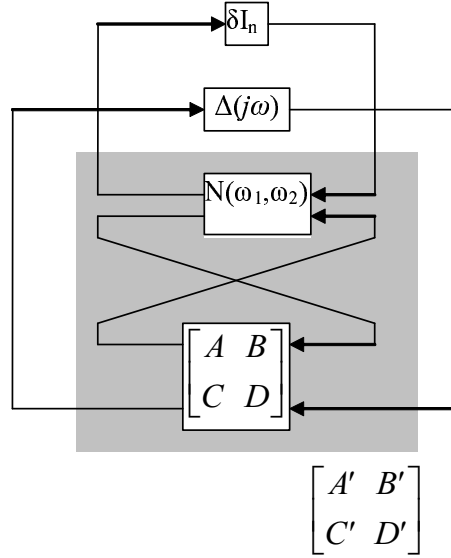
Pour  $\omega \in [\omega_1; \omega_2]$  et  $\delta \in [-1; +1]$ , le schéma de la Figure 5-6 est équivalent à celui de la Figure 5-7, si on tient compte de (5.19).

L'interconnexion de la partie grisée définit une nouvelle représentation d'état  $(A', B', C', D')$  qui s'exprime grâce au produit de Redheffer (défini en 5.2.1) de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = S \left( N_{(\omega_1; \omega_2)}, \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) \quad (5.21)$$

Le paramètre  $\delta$  de la Figure 5-7 représente la pulsation  $\omega$  et doit appartenir à l'intervalle  $[-1; +1]$  pour couvrir la totalité de l'intervalle de pulsations  $[\omega_1; \omega_2]$ . Par contre aucune contrainte concernant la norme de  $\Delta$  n'est imposée. C'est pour tenir compte de cette différence que la valeur singulière structurée dissymétrique a été introduite.

Les définitions et théorèmes suivants constituent des outils de calcul d'un majorant de  $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$  sur l'intervalle  $[\omega_1; \omega_2]$ .

FIG. 5-7 – Schéma de la  $\nu$ -analyse

**Définition 5.8.1.** Soit une matrice  $P' \in \mathcal{C}^{(n+k) \times (n+k)}$ . La valeur singulière structurée dissymétrique, relative à l'ensemble  $\underline{\Delta}$  :

$$\underline{\Delta} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta \in \mathcal{C}^{k \times k} ; \Delta = \text{diag}\{\Delta_1, \dots, \Delta_q, \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}, \varepsilon_1 I_{c_1}, \dots, \varepsilon_c I_{c_c}\} \\ \Delta_i \in \mathcal{C}^{k_i \times k_i} ; \delta_i \in \mathbb{R} ; \varepsilon_i \in \mathcal{C} \end{array} \right\} \quad (5.22)$$

est définie par [FT92], [FF97] :

- i)  $\nu_{\underline{\Delta}}(P') = 0$  s'il n'existe aucune matrice  $\Delta \in \underline{\Delta}$  telle que  $\det(I - \Delta' P') = 0$ ,
- ii)  $\nu_{\underline{\Delta}}(P') = \left( \min_{\substack{\Delta \in \underline{\Delta} \\ \delta \in [-1; +1]}} \{ \bar{\sigma}(\Delta) ; \exists \Delta' = \text{diag}(\delta I_n, \Delta) : \det(I - \Delta' P') = 0 \} \right)^{-1}$  si non.

Le théorème suivant est alors déduit de la définition 5.8.1.

**Théorème 5.8.1.** Les deux relations suivantes sont équivalentes :

$$\forall \omega \in [\omega_1; \omega_2] \quad \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq \bar{\mu} \iff \nu_{\underline{\Delta}} \left( \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \right) \leq \bar{\mu} \quad (5.23)$$

où  $A', B', C', D'$  sont définies par les relations (5.20) et (5.21).

Ces propriétés permettent de déterminer un majorant de  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$  sur l'intervalle  $[\omega_1; \omega_2]$  en déterminant un majorant de la valeur singulière structurée dissymétrique d'une seule matrice constante.

Lors de la mise en oeuvre de l'analyse de robustesse, il est alors nécessaire de définir un ensemble  $\Omega$  d'intervalles  $[\omega_i; \omega_{i+1}]$  tel que  $\bigcup_i [\omega_i; \omega_{i+1}] = [0; +\infty[$ . Il est alors possible de formuler le corollaire suivant :

**Corollaire 5.8.1.** *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

i)  $M(s)$  et  $\Delta(s)$  appartiennent à  $\mathcal{RH}_\infty$ , et

$$\forall [\omega_i; \omega_{i+1}] \in \Omega \quad \nu_{\underline{\Delta}} \left( S \left( N_{[\omega_i; \omega_{i+1}]}, \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) \right) \leq \bar{\mu} \quad (5.24)$$

ii) le système de la Figure 5-1 est stable pour toute incertitude  $\Delta(s)$  de type (5.2) telle que :

$$\|\Delta(s)\|_\infty < \frac{1}{\bar{\mu}} \quad (5.25)$$

Dans l'application, le majorant déterminé dans (5.24) est fonction de la largeur des intervalles  $[\omega_i; \omega_{i+1}]$ . Afin de réduire de manière itérative la largeur de l'intervalle où le majorant de  $\nu_{\underline{\Delta}}$  est le plus grand, [DF95] propose un algorithme dont voici les grandes lignes.

**Algorithme 5.8.1.** [DF95]

- i) Calcul d'un majorant de  $\nu_{\underline{\Delta}}$  sur un ensemble d'intervalles  $[\omega_i; \omega_{i+1}]$  choisis a priori,
- ii) Division de l'intervalle où le majorant obtenu est le plus grand en deux nouveaux intervalles,
- iii) Calcul d'un majorant de  $\nu_{\underline{\Delta}}$  sur les deux nouveaux intervalles,
- iv) Retour à ii) jusqu'à ce que la largeur de l'intervalle où le majorant de  $\nu_{\underline{\Delta}}$  est le plus grand soit inférieur à une valeur choisie a priori.

Cet algorithme à l'avantage de ne pas sous-estimer le majorant de la valeur singulière structurée au prix d'une mise en oeuvre plus lourde et plus coûteuse en temps de calcul.

En effet, la détermination de la valeur singulière structurée dissymétrique s'effectue de manière itérative au moyen de la valeur singulière structurée. De plus, le bloc d'incertitude réelle contenant la pulsation est de taille  $n$  c'est à dire du nombre de variables d'état de la matrice d'interconnexion  $M(s)$ . Les facteurs d'échelle  $D$  et  $G$  sont donc augmentés de matrices réelles symétriques  $n \times n$ . Le nombre de variables de décision qui interviennent dans le problème LMI (5.12) est donc augmenté de  $2n(n+1)$ .

**Remarque 5.8.1.** Dans le but de réduire le temps de calcul nécessaire à l'aboutissement de cet algorithme, une variante est proposée. Elle consiste à ajouter une condition d'arrêt dans *iv*).

*iv')* Retour à *ii*) jusqu'à ce qu'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

- ◇ la largeur de l'intervalle où le majorant de  $\nu_{\underline{\Delta}}$  est le plus grand est inférieure à une valeur choisie a priori
- ◇ Le majorant de  $\nu_{\underline{\Delta}}$  sur tous les intervalles est inférieur à une valeur choisie a priori.

On utilisera cette stratégie lorsqu'on veut garantir que  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$  est inférieur à un niveau  $\bar{\mu}$  donné.

### 5.8.2 Exploitation optimale des facteurs d'échelle $D$ et $G$

Les résultats précédents montrent que le calcul de la borne supérieure la plus fine de la valeur singulière structurée, pour une pulsation  $\omega$ , équivaut à un problème de minimisation d'un objectif linéaire  $\beta$  (paragraphe 5.4.3), sous les contraintes LMI (5.12). Le résultat  $\beta^*$  est alors la meilleure borne supérieure connue de  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$ .

Soient  $D^*$  et  $G^*$  les facteurs d'échelle correspondant à  $\beta^*$ . Pour une valeur  $\beta_T \geq \beta^*$  fixée, on désire connaître l'intervalle de pulsation pour lequel la paire  $\{D^*, G^*\}$  garantit que  $\beta_T$  est une borne supérieure de  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$ . Le théorème 5.8.2 [MD95] permet de déterminer cet intervalle. La méthode envisagée consiste à substituer la résolution d'un nombre infini d'optimisations sous contraintes LMI, au calcul d'un nombre fini de facteurs d'échelle.

**Théorème 5.8.2.** Soit  $(A, B, C, D)$ , une représentation d'état de  $M(s) = H_{z_{\Delta}\nu_{\Delta}}(s)$  comme le présente la Figure 5-1.

Soit un réel positif  $\beta_T$  et deux facteurs d'échelle  $D_0 \in \underline{D}$  et  $G_0 \in \underline{G}$ . Les ensembles  $\underline{D}$  et  $\underline{G}$  sont définis en (5.8) et (5.10) respectivement.

Soit la matrice Hamiltonienne  $H$ , définie par :

$$H := \bar{A} + \bar{B}(I - \bar{D})^{-1}\bar{C} \quad (5.26)$$

avec :

$$\begin{aligned}\bar{A} &:= \begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T D_0 C & -A^T \end{bmatrix} & \bar{B} &:= \begin{bmatrix} B \\ C^T D_0 D - j C^T G_0 \end{bmatrix} \frac{D_0^{-1}}{\beta_T^2} \\ \bar{C} &:= [D^T D_0 C + j G_0 C - B^T] \\ \bar{D} &:= (D^T D_0 D + j(G_0 D - D^T G_0)) \frac{D_0^{-1}}{\beta_T^2}\end{aligned}\tag{5.27}$$

Si le triplet  $\{\beta_T, D_0, G_0\}$  satisfait, pour une pulsation  $\omega_i$  donnée :

$$M(j\omega_i)^* D_0 M(j\omega_i) + j(G_0 M(j\omega_i) - M(j\omega_i)^* G_0) - \beta_T^2 D_0 < 0\tag{5.28}$$

et

$$1 \notin \text{spectre}(\bar{D})$$

alors :

$$\forall \omega \in [\omega^-; \omega^+] \quad \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq \beta_T$$

$j\omega^-$  et  $j\omega^+$  sont les valeurs propres imaginaires pures de  $H$  les plus proches de  $j\omega_i$  de telle sorte que  $\omega^- < \omega_i$  et  $\omega_i < \omega^+$ .

De ce théorème, on peut notamment remarquer que si la matrice  $H$  n'a pas de valeur propre imaginaire pure supérieure (respectivement inférieure) à  $j\omega_i$ , alors  $\omega^+ = +\infty$  (respectivement  $\omega^- = 0$ ).

En conséquence, on peut tester, sans échantillonnage en fréquence, si la valeur singulière structurée est inférieure à une valeur donnée. Dans ce but, [VD99] propose un algorithme qui sera mis en oeuvre par la suite. Il consiste à tester plusieurs valeurs d'un paramètre  $\beta_T$ , dans l'ordre croissant et à déduire pour chacune d'elles les intervalles de pulsations sur lesquels  $\beta_T$  est une borne supérieure de la valeur singulière structurée.

### Algorithme 5.8.2.

i) Choix d'une valeur initiale  $\beta_{init} = \beta_{min}$  et d'un pas d'accroissement de cette grandeur  $\Delta\beta$ .

Soit  $\Lambda$  l'ensemble des intervalles de pulsations pour lesquels aucune borne supérieure n'a encore été trouvée. Sa valeur initiale est donc  $\Lambda = [0; +\infty[$ .

ii) Recherche d'une première pulsation appartenant à  $\Lambda$  telle que  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq \beta_{init}$ .

S' il n'en existe pas, on incrémente  $\beta_{init}$  d'un pas  $\Delta\beta$ , soit  $\beta_{init} = \beta_{init} + \Delta\beta$  et on retourne à i).

Sinon on pose  $\beta_T = \beta_{init}$  et on continue.

iii) Identification de l'ensemble des intervalles de pulsation noté  $\bigcup I_k$ , inclus dans  $\Lambda$  pour lesquels  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq \beta_T$ .

La borne supérieure la plus faible sur  $\bigcup I_k$  est alors égale à  $\beta_T$ .

Restriction de  $\Lambda = \Lambda \setminus \bigcup I_k$ .

iv)

Si  $\Lambda = \emptyset$ , l'intervalle  $[0; +\infty[$  est entièrement couvert.

Sinon,  $\beta_T = \beta_T + \Delta\beta$  et retour à iii)

Afin de vérifier la cohérence de la borne supérieure de la valeur singulière structurée trouvée, le problème d'optimisation 5.4.3 est résolu en prenant  $P = M(j\omega)$ . Le triplet  $\beta, D_0, G_0$  est alors obtenu et la pulsation  $\omega$  appartient à l'intervalle d'analyse.

Cet algorithme fournit graphiquement une courbe en escalier qui donne une allure de  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$ , dont la finesse dépend du pas  $\Delta\beta$ .

## 5.9 Analyse de robustesse d'un système LPV incertain

La Figure 5-8 représente sous forme standard un système LPV incertain, où  $\Delta_1(s)$  rassemble toutes les incertitudes invariantes et  $\Delta_2(t)$  tous les paramètres variant dans le temps.

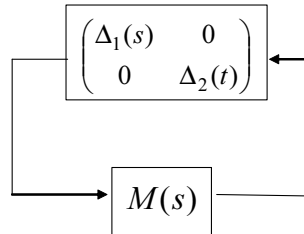


FIG. 5-8 – Analyse de robustesse d'un système LPV incertain

L'analyse de robustesse d'un tel système consiste à déterminer la plus petite incertitude  $\Delta_1(s)$  qui déstabilise le système LPV, avec  $\Delta_2(t)$



quelconque de gain  $\mathcal{L}_2$  inférieur à une valeur fixée, soit par exemple  $\|\Delta_2(t)\|_{\mathcal{L}_2} \leq \frac{1}{\gamma_2}$ .

L'analyse de robustesse d'un système LPV incertain ressemble donc fortement au calcul de  $\nu$ . Le bloc  $\begin{pmatrix} \Delta_1(s) & 0 \\ 0 & \Delta_2(t) \end{pmatrix}$  est considéré de façon dissymétrique. Toutefois,  $\Delta_2(t)$  varie dans le temps ce qui n'est pas le cas de l'analyse de robustesse par  $\nu$ -analyse. En conséquence les multiplicateurs qui interviennent sur  $\Delta_2(t)$  ne sont plus des matrices de transfert mais des matrices constantes.

L'inverse de la norme  $H_\infty$  de la plus petite incertitude qui déstabilise le système de la Figure 5-8 est donnée par le maximum de la valeur singulière structurée de  $M(s)$  pour  $s = j\omega$ . Un majorant est obtenu en résolvant le problème suivant :

$$\max_{s=j\omega} \min_{\substack{D_1(s) \in \underline{D}_1 \\ D_2 \in \underline{D}_2 \\ G_1(s) \in \underline{G}_1 \\ G_2 \in \underline{G}_2}} \gamma_1^2, \left\{ \begin{array}{l} M(s)^* \begin{pmatrix} D_1(s) & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} M(s) + j(M(s)^* \begin{pmatrix} G_1(s) & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} - \\ \begin{pmatrix} G_1(s) & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} M(s)) < \begin{pmatrix} \gamma_1^2 D_1(s) & 0 \\ 0 & \gamma_2^2 D_2 \end{pmatrix} \\ D_1(s) = D_1^*(s) > 0, \quad D_2 = D_2^* > 0 \end{array} \right. \quad (5.29)$$

Les ensembles  $\underline{D}_1$ ,  $\underline{D}_2$ ,  $\underline{G}_1$  et  $\underline{G}_2$  sont définis en fonction de la structure des matrices  $\Delta_1(s)$  et  $\Delta_2(t)$ , comme les ensembles  $\underline{D}$  (5.8) et  $\underline{G}$  (5.10).

Le problème (5.29) est difficile à résoudre car il est de dimension infinie. Pour se ramener à un problème de dimension finie, on peut effectuer un échantillonnage sur  $n$  fréquences. Toutefois, la présence des multiplicateurs constants contraint de considérer un problème constitué de  $n$  LMI. La mise en forme du problème est alors la suivante :

$$\max_{\substack{s_i = j\omega_i \\ i = 1, \dots, n}} \min_{\substack{D_{1,i} \in \underline{D}_1 \\ D_2 \in \underline{D}_2 \\ G_{1,i} \in \underline{G}_1 \\ G_2 \in \underline{G}_2 \\ i = 1, \dots, n}} \gamma_1^2, \left\{ \begin{array}{l} M(s_i)^* \begin{pmatrix} D_{1,i} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} M(s_i) + j \left( M(s_i)^* \begin{pmatrix} G_{1,i} & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} - \right. \\ \left. \begin{pmatrix} G_{1,i} & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} M(s_i) \right) < \begin{pmatrix} \gamma_1^2 D_{1,i} & 0 \\ 0 & \gamma_2^2 D_2 \end{pmatrix} \\ D_{1,i} = D_{1,i}^* > 0, \quad D_2 = D_2^* > 0 \end{array} \right. \quad (5.30)$$

La résolution d'un tel problème reste complexe. Une méthode itérative

sous-optimale est envisagée et peut être mise en oeuvre de la manière suivante.

- i) Echantillonnage du problème initial en un nombre fini de fréquences (inférieur ou égal à 5). La résolution des LMI fournit des multiplicateurs constants  $D_2$  et  $G_2$ .
- ii) Echantillonnage du problème initial pour un nombre plus important de fréquences. Les multiplicateurs constants de *i*) sont utilisés. Les  $n$  LMI sont alors indépendantes ce qui rend la résolution plus rapide.
- iii) Retour à l'étape *i*) avec conservation des  $D_{1,i}$  et  $G_{1,i}$ .

## 5.10 Conclusion

Ce chapitre a présenté des méthodes d'analyse de robustesse de la stabilité, avec et sans échantillonnage en fréquence. Plusieurs bornes supérieures de la valeur singulière structurée peuvent être utilisées par résolution de problèmes d'optimisation LMI.

Il arrive que le temps de calcul de la procédure de  $\mu$ -analyse soit important. Il peut toutefois être diminué en choisissant des bornes supérieures plus ou moins précises.

L'application à l'étude de la robustesse des lois de commande dans le cadre de l'assistance au contrôle latéral sera développée plus en détail dans la suite de ce mémoire.

Deux méthodes permettent de contourner l'échantillonnage en fréquence. La première appelée  $\nu$ -analyse consiste à calculer une borne supérieure de la valeur singulière structurée dissymétrique  $\nu$ , pour un problème de taille augmentée. Une seconde méthode se fonde sur l'exploitation de manière optimale des facteurs d'échelle correspondant au calcul d'une borne supérieure de la valeur singulière structurée. Ces stratégies seront effectivement mises en application dans le cadre de la Thèse.



## **Deuxième partie**

# **Application à l'assistance au contrôle latéral d'un véhicule routier**



# **Chapitre 1**

## **Modélisation du véhicule et analyse du mode latéral**

### **1.1 Introduction**

L'objectif étant d'élaborer des stratégies d'assistance au contrôle latéral de véhicule routier léger, il est indispensable de modéliser le véhicule.

Depuis quelques années, la modélisation des véhicules routiers pour le contrôle automatique et plus généralement pour le contrôle global de châssis est la préoccupation des chercheurs [Pha90], [Gil92], [Deb96]. Le véhicule est un système mécanique complexe dans la mesure où il possède des caractéristiques non linéaires introduites notamment par des organes de liaison tels que des ressorts et amortisseurs. De plus, il est l'objet de nombreuses variations de paramètres tels que la masse, la vitesse et l'adhérence par exemple. [Pha90], [Gil92] et [Deb96] ont montré qu'un modèle d'analyse comportant six degrés de liberté est suffisant.

Le contrôle dynamique de châssis peut être envisagé selon plusieurs axes. Son principe reste toutefois fondé sur l'analyse des forces qui s'exercent aux pieds des roues selon les directions longitudinale, transversale et verticale. Des stratégies de contrôles individuelles ou combinées de ces trois modes peuvent donc être mises en œuvre. Dans le cadre du suivi de trajectoire et pour plus de simplicité, ces recherches ont finalement abouti à aborder la modélisation selon deux domaines : un mode latéral qui tient compte des mouvements transversaux du véhicule sur la chaussée et un mode longitudinal gérant la dynamique du véhicule relative au régime moteur (accélération et freinage).

Dans le cadre de l'application, nous nous intéressons à l'assistance au contrôle latéral c'est pourquoi la modélisation du mode latéral du véhicule est uniquement utilisée.

Dans ce chapitre, nous cherchons à minimiser les effets des non linéarités en se basant sur des hypothèses simplificatrices dans le but d'aboutir à un modèle linéaire simple qui, par la suite, sera utilisé pour la synthèse des correcteurs. L'organisation de ce chapitre est le suivant.

D'abord les mouvements et les principaux organes constitutifs du véhicule sont caractérisés et définis. Le véhicule complet est modélisé sous certaines hypothèses simplificatrices. Ensuite, le découplage des deux modes longitudinal et latéral est effectué. Le modèle non linéaire du mode latéral est linéarisé et les comportements linéaire et non linéaire sont analysés sur des trajectoires d'évolution du véhicule. Une présentation de l'instrumentation nécessaire en capteurs et actionneurs, dans le cadre de l'étude est réalisée.

Le logiciel de simulation d'environnement routier développé au LIVIC est enfin exposé.

## 1.2 Mouvements et organes du véhicule

### 1.2.1 Les mouvements du véhicule

Le véhicule représenté sur la Figure 1-1 possède six degrés de liberté constitués par un ensemble de rotations et de translations.

La translation sur l'axe  $\vec{x}$  caractérise le déplacement longitudinal  $x$  du véhicule et le déplacement latéral se fait selon l'axe  $\vec{y}$ . La translation sur l'axe  $\vec{z}$  permet le mouvement vertical  $z$  de la caisse du véhicule par l'intermédiaire de ses suspensions. La rotation autour de l'axe  $\vec{z}$  autorise le déplacement angulaire de lacet  $\psi$ , elle définit également son cap. De plus, la grandeur  $\beta$  qui constitue l'angle entre le cap et le vecteur vitesse  $\vec{V}$  du véhicule, est l'angle de dérive. La rotation autour de l'axe  $\vec{x}$  définit l'angle de roulis  $\phi$ , phénomène en particulier ressenti lorsque le véhicule se déplace dans un virage. La dernière rotation définit le mouvement de tangage par le déplacement angulaire  $\theta$ . Il intervient par exemple lors des phases d'accélération et de freinage.

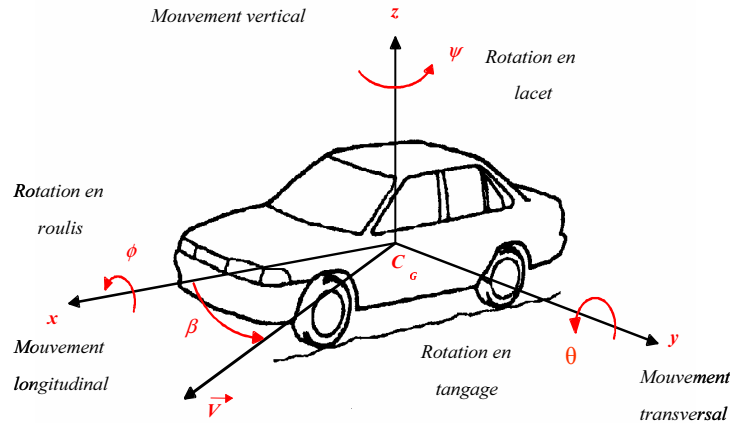


FIG. 1-1 – Les degrés de liberté du véhicule

### 1.2.2 Les organes du véhicule

Le véhicule est un système délicat à modéliser dans la mesure où il comporte de nombreux éléments mécaniques et électroniques. Chaque dispositif a une fonction bien précise qu'il est nécessaire de bien comprendre pour la modélisation. Il est donc possible de présenter de la même manière que pour les degrés de liberté du véhicule, les organes intervenant dans les modes longitudinal et latéral.

#### 1.2.2.1 Les organes pour le contrôle longitudinal

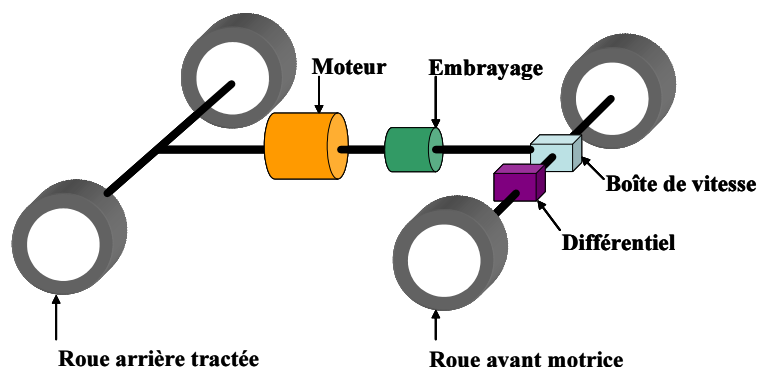


FIG. 1-2 – Les organes constitutifs du mode longitudinal

La Figure 1-2 présente une schématisation par blocs des organes prin-



ci-paux du contrôle longitudinal du véhicule. Les sous-systèmes qui interviennent dans la dynamique longitudinale sont constitués du groupe motorisation, du système de freinage, du groupe embrayage ou convertisseur de couple, de la transmission, des roues et du contact pneu/chaussée. Le contrôle global de ces éléments permet au véhicule de réaliser des freinages, accélérations, arrêts et démarrages.

#### 1.2.2.2 Les organes pour le contrôle latéral

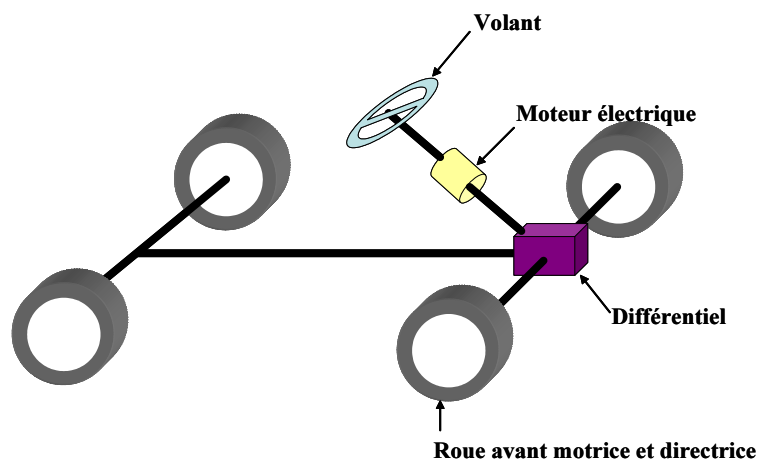


FIG. 1-3 – Les organes constitutifs du mode latéral

La dynamique latérale du véhicule est régie par le volant, la colonne de direction, les roues directrices et le contact pneu/chaussée comme le montre la Figure 1-3. Ces éléments permettent au véhicule de se déplacer latéralement par action du conducteur sur le volant, d'évoluer dans un virage et d'effectuer des changements de voie. Dans le cadre de l'application, un moteur à courant continu est disposé sur la colonne de direction pour assister le conducteur dans ses manoeuvres.

### 1.3 Equations de la dynamique du mode latéral d'un véhicule

Dans ce paragraphe, l'objectif est d'établir les équations de la dynamique du mode transversal d'un véhicule dont les seuls mouvements envisagés sont la translation, le roulis et le lacet. On supposera par la suite

que le véhicule n'effectue pas de mouvement de tangage. Ce mode concerne la dynamique longitudinale. Il est en effet engendré par les sollicitations d'accélération et de freinage.

### 1.3.1 Notations et repères

Les expressions des matrices de changement de repères sont développées. Elles permettent de passer respectivement du repère absolu au repère lié au véhicule, puis à celui lié à la caisse. Les repères utilisés sont les suivants :

- $R^a$  le repère absolu
- $R^v$  le repère lié au véhicule
- $R^c$  le repère lié à la caisse du véhicule

**Remarque 1.** Dans la suite, le repère dans lequel est exprimé le vecteur est noté en exposant, et en indice le point auquel le vecteur est rattaché. Ainsi, le vecteur donnant la position du centre de gravité dans le repère lié au véhicule sera noté  $r_G^v$ . Si l'exposant ou l'indice ne sont pas précisés, c'est que le vecteur a été défini au préalable.

Les deux principes de la dynamiques sont développés dans le dernier repère  $R^c$ .

#### Passage de $R^a$ à $R^v$

Le repère absolu  $R^a$  est supposé galiléen. On suppose qu'à l'origine le repère absolu et celui lié au véhicule sont confondus.

Pour passer de  $R^a$  à  $R^v$ , il faut effectuer successivement une translation de vecteur  $r_{O_v}^a$  puis une rotation d'angle  $\psi$  selon l'axe  $z^v$  comme le montre la Figure 1-4.

$$\begin{aligned} x^v &= x^a \cos(\psi) + y^a \sin(\psi) \\ y^v &= -x^a \sin(\psi) + y^a \cos(\psi) \\ z^v &= z^a \end{aligned} \tag{1.1}$$

On note  $R_\psi$  la matrice de passage de  $R^a$  à  $R^v$ . Elle a pour expression :

$$R_\psi = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

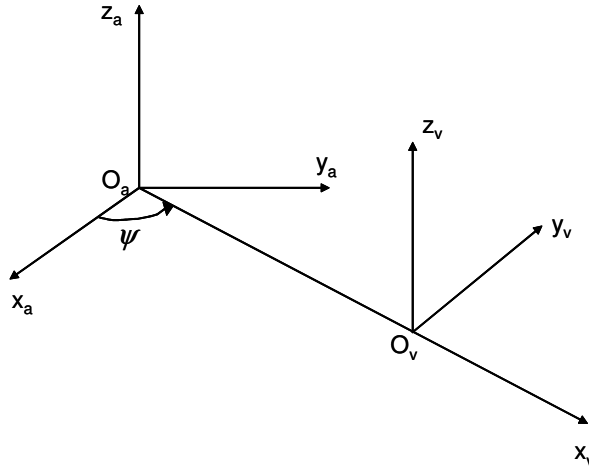


FIG. 1-4 – Passage de  $R^a$  à  $R^v$

#### Passage de $R^v$ à $R^c$

La modélisation d'un véhicule, avec des suspensions, confère à la caisse les types de mouvements que sont le roulis et le tangage. Tout d'abord le mouvement de tangage est une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $y^v$  qui amène dans un repère intermédiaire  $R^i$ . Les coordonnées des vecteurs de ce repère en fonction de celles dans  $R^v$  sont :

$$\begin{aligned} x^i &= x^v \cos(\theta) - z^v \sin(\theta) \\ y^i &= y^v \\ z^i &= x^v \sin(\theta) + z^v \cos(\theta) \end{aligned} \quad (1.3)$$

La matrice exprimant cette rotation,  $R_\theta$  s'écrit :

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Finalement, le mouvement de roulis est représenté par une rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe  $x^i$ . L'expression des coordonnées des vecteurs dans le repère  $R^c$  en fonction de leur coordonnées dans  $R^i$  est :

$$\begin{aligned} x^c &= x^i \\ y^c &= y^i \cos(\phi) - z^i \sin(\phi) \\ z^c &= y^i \sin(\phi) + z^i \cos(\phi) \end{aligned} \quad (1.5)$$

La matrice  $R_\phi$ , associée à cette transformation s'écrit :

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Les Figures 1-5 (a) et 1-5 (b) schématisent graphiquement les opérations géométriques effectuées pour passer du repère lié au véhicule  $R^v$  à celui lié à la caisse  $R^c$ .

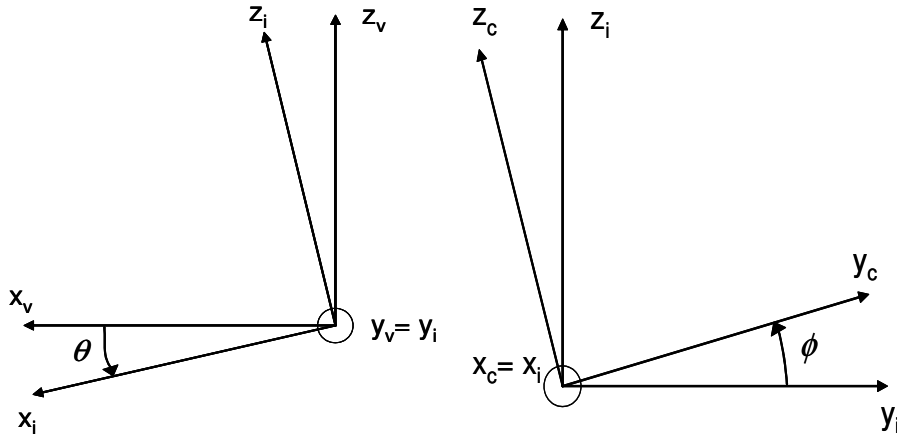


FIG. 1-5 – (a) Passage de  $R^v$  à  $R^i$ , (b) Passage de  $R^i$  à  $R^c$

### 1.3.2 Expression des principes fondamentaux de la dynamique

L'objectif de ce paragraphe est de développer les équations permettant de calculer l'évolution des positions et angles du véhicule en fonction de la vitesse et de la vitesse angulaire dans le repère lié à la caisse.

Pour ce faire, il faut appliquer le principe fondamental de la dynamique au véhicule dans le repère lié à la caisse qui s'exprime à partir des deux équations suivantes :

#### Le premier principe : l'équation des forces

Il traduit le fait que la somme des forces extérieures appliquées au véhicule est égale à sa masse, supposée constante, multipliée par son accélération :

$$m\Gamma = \Sigma F_{ext} \quad (1.7)$$

#### Le second principe : l'équation des moments

Il exprime une relation similaire avec la somme des moments exté-

rieurs et le moment dynamique :

$$H = \Sigma M_{ext} \quad (1.8)$$

Afin de pouvoir appliquer les principes de la dynamique, il est nécessaire de calculer les expressions de l'accélération  $\Gamma$  et du moment dynamique  $H$ . Les développements sont d'abord réalisés dans le cas général, puis ils sont appliqués au système constitué du véhicule. Les expressions sont donnés dans le repère lié à la caisse  $R^c$ . Le point  $O^i$  est l'origine du repère intermédiaire  $R^i$ .

**Remarque 2.** Dans la suite, on distingue deux types de dérivation celle effectuée dans le repère absolue, notée  $(\dot{\phantom{x}})$ , et celle dans le repère lié au mobile considéré, notée  $(\overset{\circ}{\phantom{x}})$ . Il existe la relation suivante entre ces deux dérivations :

$$\dot{X} = \overset{\circ}{X} + \Omega \wedge X \quad (1.9)$$

$\Omega$  est le vecteur vitesse de rotation entre le repère absolu et le repère lié à la caisse. Nous avons :  $\dot{\Omega} = \overset{\circ}{\Omega}$ . Et  $\wedge$  est le produit vectoriel.

### Expression de l'accélération

Soit  $X_G^c$  la projection dans le repère lié à la caisse de la position du centre de gravité dans le repère absolu, il en est de même pour  $O^c$ . Ce vecteur s'exprime alors sous la forme suivante :

$$X_G^c = X_{O^c}^c + r_G^c \quad (1.10)$$

où,  $r_G^c = \underline{O^c G}$ . Pour obtenir la vitesse du point  $G$ , on dérive l'équation (1.10) dans le repère absolu :

$$\begin{aligned} v_G^c &= \dot{X}_G^c \\ \iff v_G^c &= \dot{X}_{O^c}^c + \dot{r}_G^c \\ \iff v_G^c &= v_{O^c}^c + \overset{\circ}{r}_G^c + \Omega \wedge r_G^c \end{aligned} \quad (1.11)$$

En dérivant une seconde fois (1.10), l'accélération de  $G$  a pour expression :

$$\begin{aligned} \Gamma_G^c &= \ddot{X}_G^c = \overset{\circ}{\dot{v}}_G^c \\ \iff \Gamma_G^c &= \overset{\circ}{\dot{v}}_{O^c}^c + \overset{\circ}{\dot{r}}_G^c + \dot{\Omega} \wedge r_G^c + \Omega \wedge \dot{r}_G^c \\ \iff \Gamma_G^c &= \Gamma_{O^c}^c + \overset{\circ}{\dot{r}}_G^c + 2\Omega \wedge \overset{\circ}{r}_G^c + \overset{\circ}{\dot{\Omega}} \wedge r_G^c + \Omega \wedge (\Omega \wedge r_G^c) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Dans cette expression, on distingue :

- l'accélération relative :

$${}^{\circ\circ}r_G^c \quad (1.13)$$

- l'accélération d'entraînement :

$$\Gamma_{O^c}^c + \overset{\circ}{\Omega} \wedge r_G^c + \Omega \wedge (\Omega \wedge r_G^c) \quad (1.14)$$

- l'accélération de Coriolis :

$$2\Omega \wedge \overset{\circ}{r}_G^c \quad (1.15)$$

On peut noter que l'accélération de  $O^c$  s'écrit :  $\Gamma_{O^c}^c = \overset{\circ}{v}_{O^c}^c + \Omega \wedge v_{O^c}^c$ .

### Expression du moment dynamique

On détermine de même l'expression du moment dynamique. D'après le théorème de Koenig, le calcul du moment dynamique en  $O^c$  est réalisé en appliquant au point  $G$  la relation suivante :

$$H_{O^c} = H_G + r_G^c \wedge m\Gamma_{O^c}^c \quad (1.16)$$

Le moment dynamique au point  $G$  est obtenu en dérivant le moment cinétique en ce point. Le moment cinétique s'écrit alors comme le produit de la matrice d'inertie du mobile considéré  $I$ , et du vecteur vitesse de rotation  $\Omega$ , d'où :

$$\begin{aligned} H_G &= I\dot{\Omega} \\ \Leftrightarrow H_G &= I\overset{\circ}{\Omega} + \overset{\circ}{\Omega} \wedge I\Omega \end{aligned} \quad (1.17)$$

La matrice d'inertie a pour expression dans le repère lié au mobile :

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

La matrice  $I$  est supposée constante dans le repère considéré.

### Application à la modélisation du véhicule

On définit  $v = [v_x, v_y, v_z]^T$ , le vecteur vitesse du centre de gravité dans le repère lié à la caisse dont les composantes sont  $v_x$  la vitesse longitudinale,  $v_y$  la vitesse latérale et  $v_z$  la vitesse verticale. De manière similaire, on note  $\Omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$  le vecteur de vitesse angulaire de la caisse.

En appliquant les relations (1.12) et (1.17) au cas de la modélisation

du véhicule et étant donné que le mouvement relatif du centre de gravité par rapport au centre du repère lié à la caisse est nul, on obtient les propriétés suivantes :

- ◊ La somme des forces dans le repère lié à la caisse en fonction des vecteurs vitesse  $v$  et vitesse de rotation  $\Omega$  a pour expression :

$$m(\overset{\circ}{v} + \Omega \wedge v + \overset{\circ}{\Omega} \wedge r_G^c + \Omega \wedge (\Omega \wedge r_G^c)) = \sum F_{ext}^c \quad (1.19)$$

- ◊ La somme des moments dans le repère lié à la caisse du véhicule vaut :

$$I\overset{\circ}{\Omega} + \Omega \wedge I\Omega + Mr_G^c \wedge (\overset{\circ}{v} + \Omega \wedge v) = \sum M_{ext}^c \quad (1.20)$$

Comme le centre de gravité est confondu avec l'origine du repère lié à la caisse, le système devient :

$$\begin{cases} m(\overset{\circ}{v} + \Omega \wedge v) = \sum F_{ext}^c \\ I\overset{\circ}{\Omega} + \Omega \wedge I\Omega = \sum M_{ext}^c \end{cases} \quad (1.21)$$

A partir de l'expression (1.21), des modèles simplifiés de véhicule peuvent être obtenus.

Un premier modèle de type bicyclette est obtenu en projetant les équations au milieu de chaque essieu sur une roue virtuelle. Le système (1.21) devient alors :

$$\begin{cases} m(\dot{v}_x - \omega_z v_y) = \sum F_{ext\ x}^c \\ m(\dot{v}_y + \omega_z v_x) = \sum F_{ext\ y}^c \\ I_z \dot{\omega}_z = \sum M_{ext\ z}^c \end{cases} \quad (1.22)$$

L'expression (1.22) peut être simplifiée pour obtenir le modèle bicyclette classique du mode latéral, en faisant les hypothèses que la vitesse longitudinale est constante et que le vecteur vitesse peut être écrit sous la forme  $V = v[1, \beta, 0]^T$ . De plus, les mouvements de rotation en roulis et en tangage sont négligés. Alors :

$$\begin{cases} mv(\dot{\beta} + r) = \sum F_{ext\ y}^c \\ I_z \dot{r} = \sum M_{ext\ z}^c \end{cases} \quad (1.23)$$

où  $r$  est la vitesse de lacet telle que  $r = \dot{\psi}$ .

Au sein du LIVIC, dans le cadre d'une thèse portant sur le contrôle latéral

du véhicule [Bag01], des travaux ont été menés sur la modélisation pour le mode latéral.

Les développements du système d'équations (1.23) permettent notamment d'explicitier la résultante des forces extérieures  $\sum F_{ext}^c$  et celle des moments extérieurs  $\sum M_{ext}^c$  appliqués au véhicule. Le paragraphe suivant s'intéresse aux forces de contact pneu/chaussée. Leurs origines sont présentées puis une expression simple du contact est donnée ce qui permet d'établir une expression linéaire qui sera intégrée dans la formulation du modèle véhicule.

## 1.4 Les forces de contact

### 1.4.1 Le frottement de Coulomb

La loi de frottement de Coulomb est une loi qui décrit le comportement des forces de contact entre deux solides :

- ◊ **Première loi** : La résultante des efforts de frottement est une force tangentielle qui s'oppose à la vitesse de glissement.
- ◊ **Deuxième loi** : Le module de cette composante est inférieur ou égal à la force normale au point d'application multiplié par un facteur, appelé coefficient de frottement de glissement, ou adhérence.

L'adhérence notée  $\nu$ , est une variable difficilement mesurable. Elle est fonction du revêtement routier, du pneumatique et surtout des conditions climatiques.  $\nu$  varie entre 0 et 1. Lorsque l'adhérence est proche de 1, le contact entre le pneumatique et la chaussée est très bon. La chaussée est alors sèche avec de bons pneumatiques. Une adhérence comprise entre 0,5 et 0,6 correspond au déplacement du véhicule sur une chaussée humide ou légèrement mouillée. Lorsque la valeur atteint  $0,2 \sim 0,3$ , la chaussée est très glissante, en dessous, la route est verglacée.

Soit  $F_N$ , la force normale au niveau du point de contact entre le pneumatique et la chaussée. Selon la deuxième loi du frottement de Coulomb, la relation suivante entre la force normale et la force tangentielle  $F_T$  est établie :

$$\|F_T\| \leq \nu \|F_N\| \quad (1.24)$$



Cette force tangentielle  $F_T$  permet de guider le véhicule.  $F_T$  peut être formulée selon deux composantes  $F_X$  et  $F_Y$ . D'après l'équation (1.24), on peut écrire :

$$\frac{F_X^2 + F_Y^2}{F_N^2} \leq \nu^2 \quad (1.25)$$

L'équation (1.25) est celle d'un disque dans le repère  $(F_X; F_Y)$ . Pour le contact pneumatique chaussée, les caractéristiques du pneumatique en longitudinale sont meilleures que celles en latérale, c'est pourquoi on parle couramment d'ellipse de friction. De plus, les forces longitudinales et latérales sont couplées et un pneumatique ne peut pas délivrer un effort maximal à la fois en longitudinal et en latéral. Ceci explique l'origine de perte de contrôle lorsque le frottement est maximal en longitudinal. La force longitudinale est alors maximale et d'après la formule de Coulomb, le pneumatique ne peut pas générer une force latérale suffisante pour guider le véhicule.

Toutefois, cette formulation ne permet d'exprimer les forces latérale et longitudinale. Il convient donc de comprendre les phénomènes à l'origine de ces forces.

#### 1.4.2 Origine des forces de contact

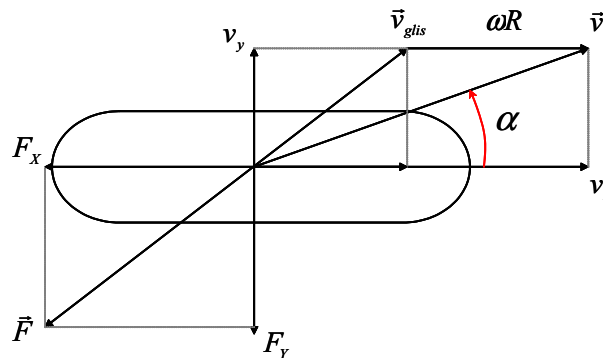


FIG. 1-6 – Vitesse au niveau du contact pneu/chaussée

##### ◇ Force longitudinale

D'après la première loi de Coulomb, la force tangentielle créée est une force qui s'oppose à la vitesse de glissement. Sur la Figure 1-6,  $v_x$  est la vitesse du véhicule au point de contact pneu/chaussée selon l'axe

longitudinal et  $v_{P_X}$  est la vitesse de roulement du pneumatique. Cette vitesse s'exprime à partir de la vitesse de rotation du pneumatique  $\omega$  et son rayon  $R$  et vaut :  $v_{P_X} = \omega R$ . La vitesse de glissement est alors la différence entre ces deux vitesses, soit :

$$v_{glis_x} = v_x - \omega R \quad (1.26)$$

Partant d'une vitesse de glissement nulle, lorsque le véhicule freine, le dispositif de freinage applique un couple visant à diminuer la vitesse de rotation de la roue.  $\omega$  diminue, la vitesse de glissement devient positive et une force de frottement  $\vec{F}$  se crée. Elle s'oppose au glissement et freine le véhicule. Plus communément, la variable  $\tau$  appelée taux de glissement normalisé est utilisée pour définir l'origine des forces de contact longitudinales. Elle a pour expression :

$$\tau = \frac{\omega R - v_x}{\max(\omega R, v_x)} \quad (1.27)$$

#### ♦ Force latérale

De même que pour les forces longitudinales, la vitesse du véhicule au point de contact pneu/chaussée, n'est pas forcément dans l'axe du pneumatique. Cette vitesse résiduelle  $v_y$  génère une force qui lui est opposée. Dans la suite, on introduit l'angle de dérive  $\alpha$ . Il est utilisé pour définir le module de la force. Dans le repère lié au pneumatique, qui a subi une rotation d'angle  $\delta$  par rapport au repère lié au véhicule, l'expression de  $\alpha$  est la suivante :

$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x} \quad (1.28)$$

Lorsque les vitesses sont exprimées dans le repère lié au véhicule, il vient :

$$\alpha = \delta - \arctan \frac{v_y^v}{v_x^v} \quad (1.29)$$

La torsion de la gomme du pneu suivant l'axe transversal crée la force latérale.

### 1.4.3 Formulation des forces

Après avoir défini les variables à l'origine des efforts de contact pneu/chaussée, on se focalise maintenant sur la formulation de ces der-

niers.

Les phénomènes à la base de la génération des efforts de contact pneu/chaussée sont très complexes. En tenant compte d'hypothèses simplificatrices, il est possible d'établir leurs expressions.

On distingue :

♦ **les modèles statiques**

Dans ce cas, la force de contact à un instant donné est uniquement fonction de paramètres tels que l'adhérence, la force normale et le taux de glissement. De nombreux modèles existent dont on peut citer ceux de Pacejka [BPL89] et Dugoff [DFS70].

♦ **les modèles dynamiques**

Ils répondent à une lacune de la formulation des modèles statiques en prenant en compte des phénomènes de retard et d'hystérésis. La force  $F_T$  est alors décrite par des équations différentielles [CdWT99].

**Remarque 1.4.1.** Dans la suite, on appelle  $x$  la variable de la force lorsqu'il n'y a pas lieu de distinguer la formulation pour le mode latéral ou pour le mode longitudinal.  $x$  représente donc soit le taux de glissement  $\tau$ , soit l'angle de dérive  $\alpha$ .

Des relevés expérimentaux des forces de contact entre le pneumatique et la chaussée montrent l'existence de trois zones différentes comme le présente la Figure 1-7.

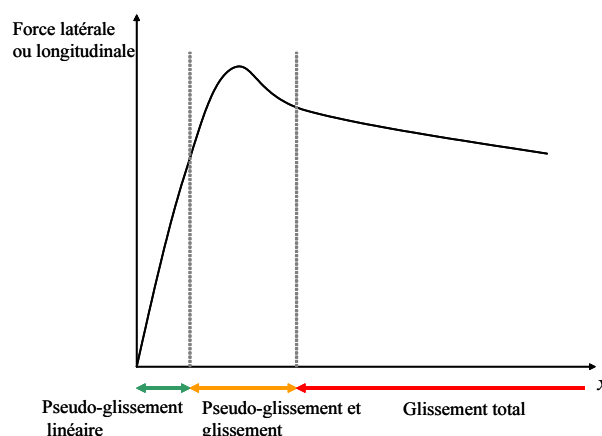


FIG. 1-7 – Forme de la courbe de la force latérale ou longitudinale

On distingue :

◇ La zone de pseudo-glissement linéaire.

Lors d'une conduite normale, les efforts de contact pneu/chaussée sont mobilisés. La force peut être assimilée à sa tangente à l'origine.

◇ La zone de pseudo-glissement et glissement.

Le véhicule reste contrôlable et le pneumatique est utilisé dans la limite de ses capacités.

◇ La zone de glissement totale.

La force de contact est saturée et le véhicule perd de sa manœuvrabilité.

Le cadre de l'application à l'assistance au contrôle latéral correspond à une conduite s'inscrivant dans la zone de pseudo-glissement linéaire. La courbe est assimilable à sa tangente à l'origine dont l'expression est la suivante :

$$F(x) = \nu C_p x \quad (1.30)$$

$C_p$  est la tangente à l'origine. Ce coefficient modélise la raideur du pneumatique. Il dépend du pneumatique et de la force normale appliquée. Cette formulation des efforts de contact pneu/chaussée est intéressante dans la mesure où elle intègre l'adhérence  $\nu$  et constitue une expression linéaire de la force qui peut être utilisée dans les modèles de synthèse de lois de commande. Elle reste valable pour des faibles valeurs de  $x$ , qui correspondent pour des pneumatiques récents à  $\alpha_{max} \approx 0,07$  radian et  $\tau_{max} \approx 0,05$ .

## 1.5 Formulation d'un modèle non linéaire pneu/chaussée

Notre travail étant centré sur le contrôle latéral, un modèle non linéaire simple de véhicule est élaboré en négligeant les mouvements de pompage, de roulis et de tangage de la caisse. Ce modèle considère les deux translations suivant les axes  $x$  et  $y$  et la dynamique de lacet. Les roues du véhicule sont numérotées de 1 à 4, comme le présente la Figure 1-8.

L'interaction entre le pneu  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) et la route est décomposée en forces longitudinale  $f_{x_i}(\tau_i)$  et latérale  $f_{y_i}(\alpha_i)$ . L'expression de ces forces est détaillée plus loin. Le modèle non linéaire est alors obtenu en écrivant

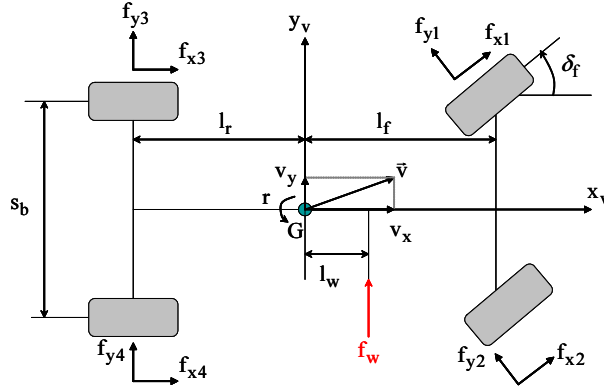


FIG. 1-8 – Représentation du véhicule et des forces extérieures

les équations des mouvements de translation et de rotation dans le repère lié au véhicule où  $v_x$  et  $v_y$  sont les composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} m(\dot{v}_x - v_y r) = f_{x_f} \cos \delta_f + f_{x_r} - f_{y_f} \sin \delta_f - k_x v_x |v_x| \\ m(\dot{v}_y + v_x r) = f_{x_f} \sin \delta_f + f_{y_r} + f_{y_f} \cos \delta_f - k_y v_y |v_y| + f_w \\ J\dot{r} = l_f (f_{x_f} \sin \delta_f + f_{y_f} \cos \delta_f) - l_r f_{y_r} + \frac{s_b}{2} (\Delta f_x - \Delta f_{y_f} \sin \delta_f) + l_w f_w \end{cases} \quad (1.31)$$

où :

$$\begin{aligned} f_{x_f} &= f_{x_1} + f_{x_2}; f_{y_f} = f_{y_1} + f_{y_2} \\ f_{x_r} &= f_{x_3} + f_{x_4}; f_{y_r} = f_{y_3} + f_{y_4} \\ \Delta f_x &= (f_{x_4} - f_{x_3}) + (f_{x_2} - f_{x_1}) \cos \delta_f \approx 0 \\ \Delta f_{y_f} &= f_{y_2} - f_{y_1} \end{aligned}$$

Tableau 1.5. Formules non linéaires des angles de glissement des pneus

$\alpha_1 = \delta_f - \tan^{-1} \left( \frac{v_y - (\eta_t \cos \delta_f) \dot{\delta}_f - (\eta_t \cos \delta_f - l_f) r}{v_x + (\eta_t \sin \delta_f) \dot{\delta}_f + (\eta_t \sin \delta_f - \frac{s_b}{2}) r} \right)$
$\alpha_2 = \delta_f - \tan^{-1} \left( \frac{v_y - (\eta_t \cos \delta_f) \dot{\delta}_f - (\eta_t \cos \delta_f - l_f) r}{v_x + (\eta_t \sin \delta_f) \dot{\delta}_f + (\eta_t \sin \delta_f + \frac{s_b}{2}) r} \right)$
$\alpha_3 = -\tan^{-1} \left( \frac{v_y - l_r r}{v_x - \frac{s_b r}{2}} \right)$
$\alpha_4 = -\tan^{-1} \left( \frac{v_y - l_r r}{v_x + \frac{s_b r}{2}} \right)$

Les forces longitudinales dépendent directement du coefficient de glissement du pneumatique ( $\tau_i$ ) alors que les forces latérales dépendent des angles de glissement ( $\alpha_i$ ). Le Tableau 1.5 résume les expressions des angles de glissement. La formule magique de Pacejka [Pac79] est utilisée sur chaque pneu pour déterminer les forces latérales :

$$f_{yi}(\alpha_i) = d_i \sin[c_i \tan^{-1}\{b_i(1 - e_i)\alpha_i + e_i \tan^{-1}(b_i\alpha_i)\}] \quad (1.32)$$

Les coefficients  $b_i, c_i, d_i, e_i$  dépendent des caractéristiques des pneumatiques, des conditions d'adhérence et des paramètres du véhicule.

Les forces longitudinales sont de la même forme que les forces latérales et sont fonction du taux de glissement ( $\tau_i$ ) de la roue numérotée  $i$  :

$$f_{xi}(\tau_i) = d'_i \sin[c'_i \tan^{-1}\{b'_i(1 - e'_i)\tau_i + e'_i \tan^{-1}(b'_i\tau_i)\}] \quad (1.33)$$

Les coefficients  $b'_i, c'_i, d'_i, e'_i$  dépendent également des caractéristiques des pneumatiques, des conditions d'adhérence et des paramètres du véhicule.

## 1.6 Formulation du modèle linéaire du véhicule

Les travaux réalisés dans les paragraphes 1.4 et 1.5 permettent d'exprimer deux types de formulations du modèle véhicule.

L'une est non linéaire. Elle prend en compte les efforts du contact pneu/chaussée et son formalisme est présenté par (1.31). Elle sera utilisée pour la validation des lois de commande dans la mesure où elle reproduit le comportement et les caractéristiques du véhicule sur lequel les paramètres ont été obtenus.

L'autre est linéaire et est exposée dans la suite. Elle est obtenue par simplification des équations non linéaires sous de multiples hypothèses. Les angles de dérive  $\beta$ , de roulis  $\phi$ , de braquage des roues avant  $\delta_{av}$  et de dérive des pneumatiques  $\alpha_{av}$  sont considérés faibles. De plus, les termes de puissance supérieure à 1 sont négligés. Cette modélisation est utilisée pour la synthèse de correcteurs  $H_\infty$  et LPV dans le cadre de l'application à l'assistance et aboutit à un système dont les entrées et les sorties sont schématisées sur la Figure 1-9.

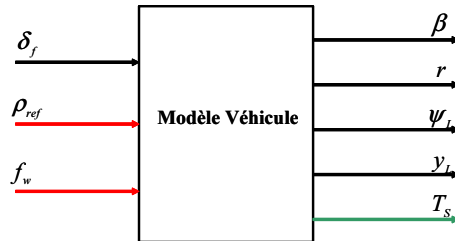


FIG. 1-9 – Schématisation des entrées et sorties du modèle véhicule

Le modèle bicyclette linéaire classique d'ordre 4 est adopté [AJR93],[CT94]. Le modèle est décrit par les deux équations différentielles (1.23). En explicitant l'expression des forces et moments extérieurs, celui-ci s'écrit :

$$\begin{cases} mv(\dot{\beta} + r) = -2(c_r + c_f)\beta + \frac{2(l_r c_r - l_f c_f)}{v}r + 2c_f \delta_f + f_w \\ I_z \dot{r} = 2(l_r c_r - l_f c_f)\beta - \frac{2(l_r^2 c_r + l_f^2 c_f)}{v}r + 2c_f l_f \delta_f + l_w f_w \\ \dot{\psi}_L = r - v \rho_{ref} \\ \dot{y}_L = v\beta + l_S r + v\psi_L \end{cases} \quad (1.34)$$

où  $\beta$  est l'angle de dérive du véhicule,  $r$  la vitesse de lacet,  $\delta_f$  est l'angle de braquage des roues avant,  $\rho_{ref}$  est la courbure de la route,  $f_w$  est la force du vent latéral,  $\psi_L$  est l'erreur sur l'angle de cap et  $y_L$  est le déplacement latéral. Enfin le couple d'auto-alignement  $T_S$  est donné par :

$$T_S = -\frac{2K_p c_f \eta_t}{R_S} \beta - \frac{2K_p c_f l_f \eta_t}{R_S v} r + \frac{2K_p c_f \eta_t}{R_S} \delta_f \quad (1.35)$$

$\eta_t$  est la largeur de contact du pneu.

## 1.7 Structure du système Véhicule-Colonne de direction-Conducteur

Modéliser le véhicule dans une manœuvre de maintien de voie est une démarche qui doit tenir compte du conducteur et de sa perception de son environnement ainsi que de l'organe d'action à savoir la colonne de direction. Ce système se compose donc de trois parties constituées d'un modèle véhicule, de celui d'une colonne de direction et du conducteur.

Le véhicule est représenté par un modèle linéaire détaillé au paragraphe 1.6 ou non linéaire.

Le modèle de la colonne de direction est présenté sur la Figure 1-10. Les entrées sont constituées du couple d'assistance  $T_a$  délivré par le moteur électrique, du couple conducteur  $T_d$  et du couple d'auto-alignement  $T_S$  issu de la dynamique du véhicule. La sortie est l'angle de braquage des roues avant  $\delta_f$  qui alimente le modèle véhicule.

Le modèle conducteur (Figure 1-11) complète la structure du système. Il est constitué de plusieurs éléments [MH93]. Le premier est appelé modèle de structure. Il contient un retard pur  $\tau_p = 0,151s$  qui représente le temps de réaction et les capacités neuromotrices humaines. De façon à conserver une description par équations d'état, ce retard sera modélisé par une

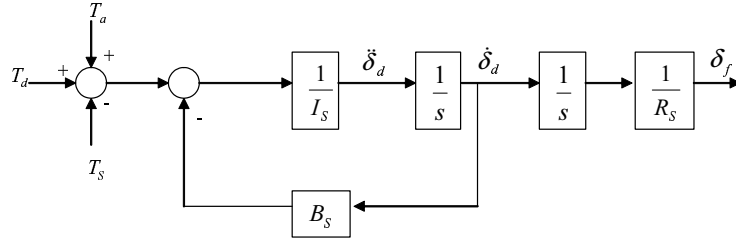


FIG. 1-10 – Modèle de la colonne de direction

approximation de Padé d'ordre 1. Le modèle contient également un filtre du second ordre caractérisé par un coefficient d'amortissement  $\xi = 0,707$  et une pulsation propre  $\omega_n = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Le second élément correspond aux facultés de prédiction du conducteur. Celles-ci sont modélisées par un filtre à avance de phase où la constante  $\tau_L = 1 \text{ s}$  représente la vigilance du conducteur par rapport à sa perception de la position relative du véhicule. Le modèle est également constitué de gains  $K_L = 20$ ,  $K_F = 0,1$  et  $l_S = 5 \text{ m}$  est la distance de visée en avant du véhicule.

Il est à noter que tous ces paramètres ne sont pas constants et sont valides pour une gamme limitée de véhicules et une configuration du conducteur précise [DM00]. Les entrées du modèle comprennent le déplacement latéral  $y_L$  et l'erreur sur l'angle de cap  $\psi_L$  qui renseignent le conducteur sur la perception de son environnement. Une troisième entrée  $T_a$  correspond au couple d'assistance délivré par le dispositif de commande. Celle-ci constitue une information supplémentaire qui est directement ressentie au niveau musculaire. On respecte ainsi le souhait de transparence de la stratégie d'assistance.

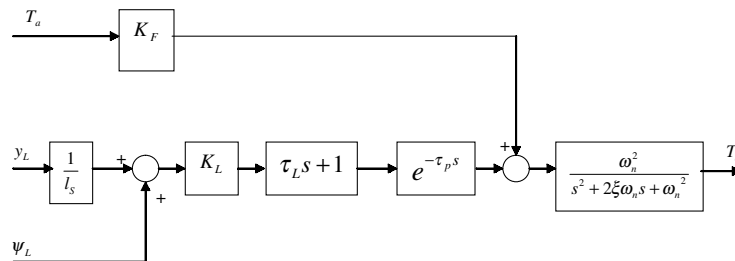


FIG. 1-11 – Modèle du conducteur

Le système complet est constitué de l'interconnexion des modèles du conducteur, de la colonne de direction et du véhicule. Les perturbations



sont représentées par un vent latéral appliqué au modèle du véhicule et une courbure de la route  $\rho_{ref}$ . La Figure 1-12 présente le schéma bouclé par le conducteur.

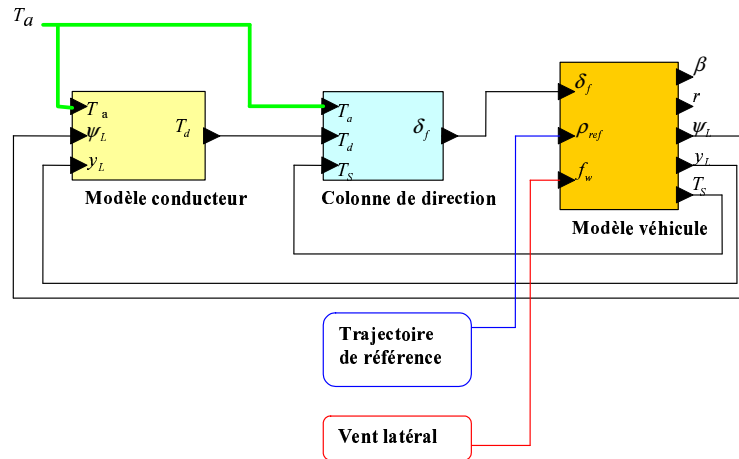


FIG. 1-12 – Système bouclé par le conducteur

## 1.8 Analyse du mode latéral

Dans ce paragraphe, une étude sur les dynamiques latérales linéaire et non linéaire du véhicule est présentée. L'influence des variations de la vitesse et de l'adhérence sera particulièrement examinée.

### 1.8.1 Valeurs numériques

Tout au long des simulations, nous utiliserons les valeurs numériques du tableau 1.8.1. Ces valeurs ont été déterminées soit à partir des données constructeurs, soit à partir de tests expérimentaux.

Tableau 1.8.1 : Nomenclature et valeurs numériques du véhicule d'essai

Paramètre	Dénomination	Valeur
$B_S$	coefficient d'amortissement de la colonne	10
$c_{f0}$	coefficient de raideur des pneus avant	$40000 \text{ N.rad}^{-1}$
$c_{r0}$	coefficient de raideur des pneus arrière	$35000 \text{ N.rad}^{-1}$
$I_S$	moment d'inertie du système de direction	$1 \text{ kg.m}^2$
$J$	moment d'inertie de lacet du véhicule	$2454 \text{ kg.m}^2$
$K_F$	gain proportionnel	0,1

Paramètre	Dénomination	Valeur
$K_L$	gain proportionnel	20
$K_p$	gain de direction manuelle	1
$l_f$	distance du centre de gravité à l'essieu avant	1,05m
$l_r$	distance du centre de gravité à l'essieu arrière	1,56m
$l_S$	distance de visée	5m
Paramètre	Dénomination	Valeur
$l_w$	distance en avant de l'essieu avant	0,4m
$m$	masse totale	1500 kg
$R_S$	rapport de réduction de la direction	21
$s_b$	longueur des essieux	1,5m
$v$	vitesse longitudinale	$[5,25]m.s^{-1}$
$\eta_t$	largeur de contact du pneu	0,13m
$\nu$	adhérence	$[0,1]$
$\xi$	coefficient d'amortissement	0,707
$\tau_L$	attention du conducteur	1s
$\tau_p$	temps de réaction	0,151s
$\omega_n$	fréquence propre	$10rad.s^{-1}$

### 1.8.2 Comparaison des modèles linéaire et non linéaire

Il existe des différences entre les réponses respectives des modèles linéaire et non linéaire. Afin de les quantifier, on peut se restreindre aux variables régulées choisies pour l'assistance au contrôle latéral :

- ◇ l'erreur sur l'angle de cap  $\psi_L$ . Cet angle est la différence entre l'angle de cap actuel du véhicule et celui désiré ou imposé par la route. Il s'exprime par :  $\psi_L = \psi - \psi_d$ .
- ◇ le déplacement latéral dans le repère lié à la route.

Ces deux grandeurs sont accessibles à la mesure grâce à une monocréma et deux algorithmes de vision qui tournent en temps réel.

Les Figures 1-13 et 1-14 montrent les écarts qui existent entre les deux modèles pour des variations de vitesse longitudinale et pour une adhérence des pneumatiques valant  $\nu = 0,8$ .

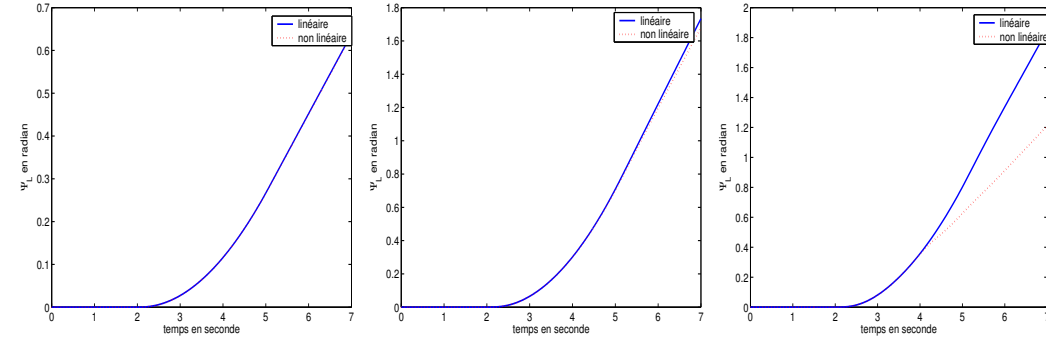


FIG. 1-13 – Comparaison de  $\psi_L$  à (a)  $5m.s^{-1}$ , (b)  $20m.s^{-1}$ , (c)  $40m.s^{-1}$

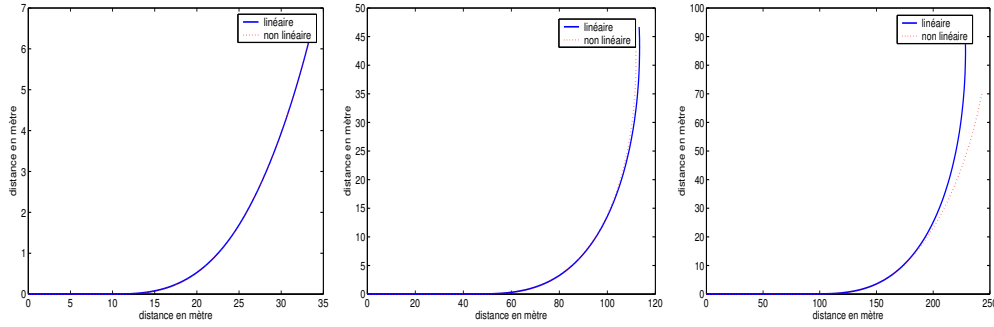


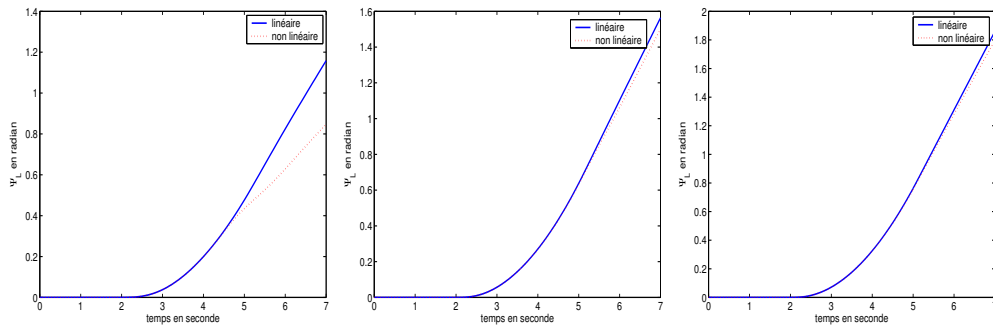
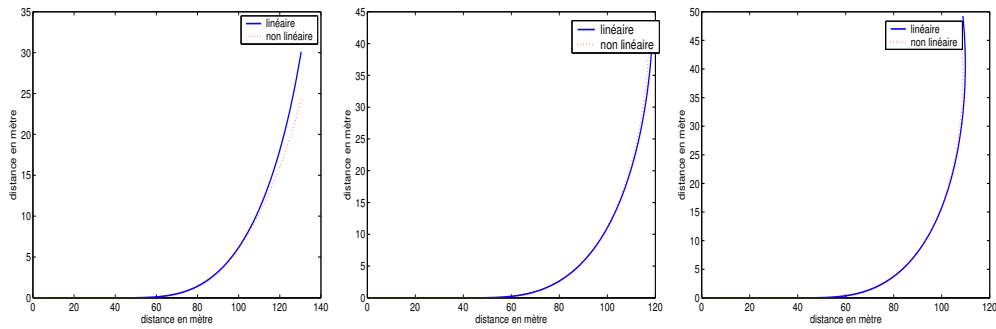
FIG. 1-14 – Comparaison des trajectoires du véhicule à (a)  $5m.s^{-1}$ , (b)  $20m.s^{-1}$ , (c)  $40m.s^{-1}$

Ces courbes ont été simulées pour une consigne d'angle de braquage des roues avant  $\delta_f = 0,1$  radian, ce qui correspond à  $5,7^\circ$ .

A basse vitesse, les écarts entre les deux modèles aussi bien au niveau du déplacement latéral (voir les Figures 1-14 (a), (b), (c)) que pour l'erreur sur l'angle de cap (voir les Figures 1-13) sont faibles. Ils augmentent de manière significative avec la vitesse.

La vitesse est maintenant fixée à  $20m.s^{-1}$ . On examine l'effet des variations d'adhérence des pneumatiques  $\nu$ . Pour ce faire, on choisit pour le paramètre  $\nu$ , les valeurs  $\nu_1 = 0,3$ ,  $\nu_2 = 0,6$ ,  $\nu_3 = 1$ , qui correspondent respectivement au déplacement du véhicule sur une chaussée glissante, humide et parfaitement sèche.

Les résultats sont donnés sur les Figures 1-15 et 1-16. Des différences sont encore visibles, elles augmentent lorsque l'adhérence diminue. On peut donc conclure que les approximations sont valides dans les cas d'études considérés, à savoir sur un réseau de voies nationales et autorou-

FIG. 1-15 – Comparaison de  $\psi_L$  à (a)  $\nu = 0,3$  (b)  $\nu = 0,6$  (c)  $\nu = 1$ FIG. 1-16 – Comparaison des trajectoires du véhicule à (a)  $\nu = 0,3$  (b)  $\nu = 0,6$  (c)  $\nu = 1$ 

tier.

## 1.9 Instrumentation en capteurs et actionneurs

Nous donnons dans ce qui suit l'instrumentation nécessaire au contrôle latéral d'un véhicule. Quelques éléments sont fournis au sujet de la plateforme expérimentale qui a été mise en œuvre au sein du LIVIC. Elle utilise le véhicule instrumenté LOLA représenté sur la Figure 1-17 (pour contrôle Longitudinal et Latéral), voiture de la série Renault Scénic équipée de capteurs proprioceptifs et extéroceptifs permettant le positionnement précis du véhicule sur la route, d'un système d'enregistrement (data-logger) capable de stocker simultanément et de manière datée les données en provenance des différents capteurs, et d'actionneurs pouvant intervenir sur les commandes latérale (moteur électrique sur la colonne de direction) et longitudinale (accélérateur et freins).



FIG. 1-17 – Véhicule de prototypage

### 1.9.1 Architecture de la plateforme

Le véhicule d'essai de prototypage sur lequel les mesures ont été réalisées est un monospace de type Renault Scenic, doté d'une boîte de vitesse automatique à 4 rapports. Les différents modules de l'application (vision, commande, interface et sécurité) ainsi que l'actionneur de commande au volant et les capteurs proprioceptifs sont assemblés autour de l'unité centrale d'un PC bureautique, situé à l'arrière du véhicule comme le montre la Figure 1-18.



FIG. 1-18 – Ordinateur et connectique

La connexion entre les différents modules propres à l'ensemble du logiciel est illustrée par le schéma synoptique de la Figure 1-19. L'information

de guidage est fournie par une caméra en vision frontale ou par positionnement DGPS. Le module de commande utilise alors les informations de déplacement latéral  $y_L$  et d'erreur de cap  $\psi_L$  issues du module de l'interface pour contrôler l'angle de braquage des roues avant par l'intermédiaire du couple d'assistance  $T_a$  délivré par le correcteur. Dans le cas de la vision, l'interface utilise les données du module de vision calculées dans un repère lié à la caméra. Finalement, un module de sécurité constitué de relais et de temporisations permet de commuter entre un état de fonctionnement normal du moteur électrique par action sur l'embrayage selon un indice de qualité du module de vision et un autre d'arrêt du moteur.

L'ensemble du système est intégré dans une application Labview qui gère trois tâches parallèlement. Ces tâches sont respectivement l'acquisition de la vitesse par un topomètre, l'exécution des modules vision/commande et une boucle de régulation pour le moteur électrique.

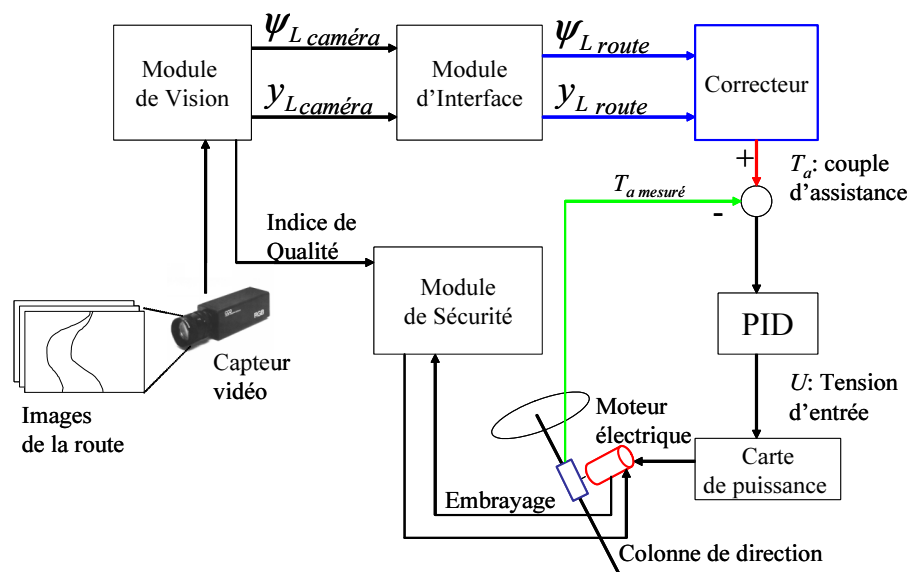


FIG. 1-19 – Schéma synoptique de l'application de l'assistance au contrôle latéral

### 1.9.2 Mesure de la vitesse de lacet

Le gyroscope est monté sur la caisse comme le présente la Figure 1-20, il mesure la vitesse angulaire autour de l'axe de la masse suspendue du véhicule.

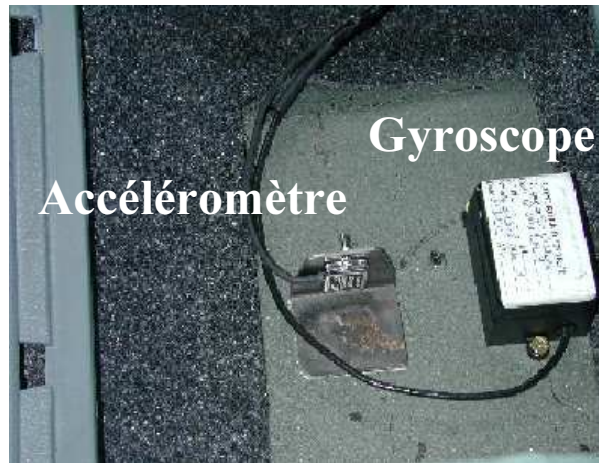


FIG. 1-20 – Gyroscope en lacet et accéléromètre transversal

### 1.9.3 Mesure de l'accélération transversale

Cette grandeur est importante pour la qualification de la qualité de confort des occupants du véhicule. Sa mesure se fait par l'intermédiaire d'un accéléromètre monté au centre de gravité et dans la direction perpendiculaire à l'axe du véhicule.

En régime permanent et sous l'hypothèse d'angles faibles, l'accélération latérale tend vers la valeur limite :

$$a_L^v(\infty) = mv^2 \frac{\delta_f}{l_f + l_r} \quad (1.36)$$

Cette relation peut donc être utilisée à la place de l'accéléromètre pour avoir une idée de l'accélération latérale. Toutefois, il faut équiper le véhicule d'un capteur d'angle volant et d'un capteur de vitesse.

### 1.9.4 Mesure du déplacement latéral

De multiples techniques sont concurrentes pour mesurer le déplacement latéral. Elles utilisent notamment un capteur vidéo, un câble rayonnant, des plots magnétiques disposés sur la chaussée ou bien des bandes laser. Il est d'ailleurs souvent nécessaire lorsque la vitesse augmente d'introduire une avance de phase en mesurant le déplacement latéral à une certaine distance  $l_S$  en avant du centre de gravité.

Le dispositif qui équipe le véhicule de prototypage est constitué d'une mono caméra en vision frontale comme le présente la Figure 1-21. Les sys-

tèmes de vision utilisés pour la perception de la route peuvent traiter jusqu'à 30 images par seconde. Ce capteur permet de fournir le déplacement latéral et l'erreur sur l'angle de cap [Liu89], [Ka00]. Le rayon de courbure de la route peut être estimé à l'aide d'un observateur à partir des deux mesures précédentes.



FIG. 1-21 – Caméra frontale

### 1.9.5 Mesure de l'erreur sur l'angle de cap

La mesure de l'erreur sur l'angle de cap est souvent associée au système de mesure du déplacement latéral. Elle peut être effectuée selon les deux méthodes suivantes :

- ◇ Mesure directe : vidéo, plots magnétiques et magnétomètres à l'avant et/ou à l'arrière du véhicule.
- ◇ Méthode de reconstruction d'état : le capteur utilisé peut être constitué d'un magnétomètre simple, d'un DGPS ou bien de bandes lasers.

### 1.9.6 Mesure de la vitesse

La mesure de la vitesse est réalisée grâce à un capteur optique à la sortie de la boîte de vitesse. Il délivre des impulsions à un rythme proportionnel à la vitesse du véhicule.

### 1.9.7 Mesure de l'angle de braquage

La mesure de l'angle de braquage des roues peut être effectuée au niveau du volant en amont de la crémaillère ou en aval.



Dans le premier cas, intervient le rapport de réduction volant-pneu. Il vaut  $R_S = 21$  pour notre application, mais celui-ci est variable d'un véhicule à un autre. Toutefois, il est toujours de l'ordre de 20. La mesure est obtenue par un codeur optique simple tour ou multi-tours et délivre un code binaire Gray pour chaque position. Le codeur optique utilisé est absolu 8 tours à 4096 positions par tours. Il est disposé sur la colonne de direction côté volant comme le montre la Figure 1-22.



FIG. 1-22 – Codeur optique pour la mesure de l'angle au volant

### 1.9.8 L'actionneur de direction

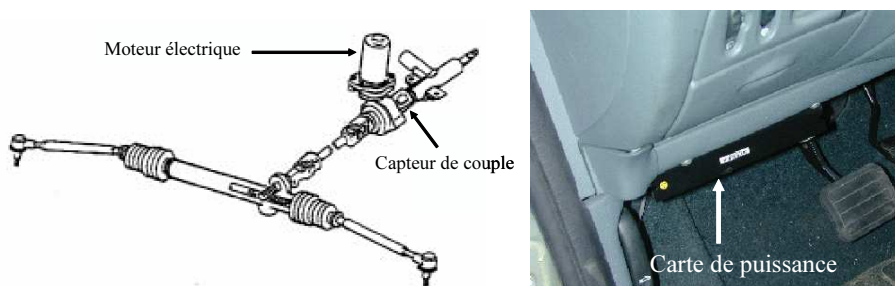


FIG. 1-23 – (a) Equipement de la colonne de direction (b) Carte de puissance

L'équipement chargé de réaliser l'action est un moteur électrique à courant continu monté sur la colonne de direction. Il est disponible sur certains véhicules de série. Il assure la direction assistée électrique. La Figure 1-23 (a) localise l'emplacement du moteur sur la colonne de direction ainsi que le capteur de couple pour mesurer l'effort exercé sur le volant.

Le moteur est commandé par une carte de puissance présentée sur la Figure 1-23 (b). La consigne de vitesse est une tension comprise entre  $-10V$  et  $+10V$ .

## 1.10 Le simulateur d'environnement routier

Le LIVIC travaille au développement d'algorithmes de traitement de données fournies par des capteurs embarqués sur véhicule de manière à pouvoir construire une perception de l'environnement entourant une voiture instrumentée. L'objectif est d'intégrer des dispositifs d'alerte en cas de conduite dangereuse ou des boucles de contrôle-commande assistant le conducteur dans sa tâche.

Des données réelles s'avèrent donc indispensables pour tester les algorithmes. La mobilisation d'un ou plusieurs véhicules et la réunion de conditions expérimentales se révèlent à la fois coûteuses et délicates autant sur le plan administratif que logistique. Par exemple, il pourrait être envisagé de tester les performances d'une loi de commande sur une chaussée humide ou bien verglacée, en présence d'un vent latéral ou bien dans d'autres conditions de conduites dégradées. C'est pourquoi il est important d'effectuer de tels tests au moment où on est assez certain de leurs résultats.

Pour répondre à ce besoin, un logiciel de simulation d'environnement routier pour véhicule intelligent avec capteurs embarqués a été développé au LIVIC dans le cadre d'un stage de l'étudiant Emmanuel Raulo de l'Université de Technologie de Compiègne.

Le but de ce logiciel est de reproduire, de la manière la plus fidèle à la réalité qui soit, le comportement d'une voiture et des capteurs dont il est équipé. Il offre la possibilité d'intégrer directement dans le logiciel, les solutions d'assistance à la conduite proposées et de tester celles-ci sur ordinateur comme le montrent les interfaces du simulateur de la Figure 1-24.

## 1.11 Conclusion

Dans ce chapitre, quelques rappels généraux sur la dynamique sont donnés et permettent d'établir les équations d'évolution du mobile qui est constitué d'un véhicule routier dans le cadre de l'application. Des hypothèses simplificatrices ont permis d'aboutir à des modèles non linéaires et linéaire.



FIG. 1-24 – Interfaces du simulateur

Il a été observé que certains paramètres caractéristiques tels que l'adhérence et la vitesse longitudinale influent fortement sur le comportement dynamique du véhicule. La comparaison de deux modèles, linéaire bicyclette puis non linéaire 4 roues, au niveau de grandeurs significatives telles que le déplacement latéral et l'erreur sur l'angle de cap a conclu à la validation du modèle linéaire issu des hypothèses simplificatrices.

De plus, une présentation de l'instrumentation nécessaire au développement et à la mise en oeuvre de l'application est donnée de même que le logiciel de simulation d'environnement routier développé au LIVIC.

Dans la suite, le modèle linéaire sera utilisé pour synthétiser les lois de commande et les modèles non linéaires, ainsi que le logiciel de simulation serviront dans la phase de validation de la stratégie d'assistance au contrôle latéral.

Des lois de commande seront construites. Consécutivement aux besoins de robustesse vis à vis des variations de certains paramètres critiques, des synthèses  $H_\infty$  à vitesses fixe puis variable seront examinées.

## Chapitre 2

# Synthèse de correcteur $H_\infty$ à vitesse fixe

### 2.1 Stratégie d'assistance en couple

Aujourd'hui, l'automobile fait l'objet d'une course au développement de nouvelles structures et techniques de contrôle et d'action pour la rendre plus efficace et plus sûre. Les commandes et mouvements mécaniques ou hydrauliques sont dorénavant remplacés par des moteurs électriques, actionneurs et capteurs.

Face à l'avènement des technologies en pleine expansion de type "Drive by Wire", les constructeurs se heurtent à l'obligation de conserver la colonne de direction comme liaison mécanique interdisant ainsi à ce jour la direction tout électrique.

La stratégie d'assistance retenue consiste donc à ajouter un couple à celui délivré par le conducteur grâce à l'intégration d'un moteur à courant continu sur la colonne de direction. Cette solution a l'avantage de conserver le lien mécanique entre le volant et les roues avant et constitue ainsi une réponse à la problématique d'assistance au contrôle latéral, implantable à court terme sur un véhicule de série.

Dans ce chapitre, nous présentons la synthèse du correcteur correspondant à cette stratégie, pour une vitesse fixe, par une méthode  $H_\infty$ . Des analyses fréquentielles et temporelles sont présentées pour procéder à une première évaluation du correcteur. Elles seront complétées, au chapitre 4, par des analyses de robustesse et des simulations non linéaires.

## 2.2 Modèle de synthèse

La connaissance d'un modèle de la dynamique du véhicule est indispensable pour la synthèse de lois de commandes robustes pour le mode latéral. Le modèle doit permettre de reproduire les phénomènes importants de la situation de conduite considérée et d'identifier l'influence des paramètres prépondérants. Le véhicule routier est un système mécanique très complexe qui présente des caractéristiques fortement non linéaires. Les organes de liaison entre la masse suspendue du véhicule et les essieux, tels que les ressorts ou les amortisseurs, sont à l'origine de ces non linéarités. De plus, les variations d'adhérence des pneumatiques et les rafales de vent affectent le système au point de le rendre difficilement maîtrisable. Des études ont montré qu'un modèle à 6 degrés de liberté est suffisant pour décrire correctement le fonctionnement du véhicule [HP90], [Lug77]. Toutefois, il reste trop complexe pour être utilisé dans la synthèse. Une solution consiste donc à séparer le mode longitudinal, qui tient compte de la dynamique accélération-freinage, du mode latéral qui caractérise les mouvements transversaux du véhicule sur la chaussée [Gil92], [Deb96]. Le modèle de synthèse ainsi obtenu comprend 3 parties, qui modélisent respectivement le véhicule, la colonne de direction et le conducteur. Pour le véhicule, le modèle bicyclette linéaire classique d'ordre 4 présenté au paragraphe 1.6 est utilisé. Son vecteur d'état est  $x_v = [\beta, r, \psi_L, y_L]^T$ . Sous la forme d'équations d'état, ce modèle s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_v = A.x_v + B.e_v \\ z_v = C.x_v + D.e_v \end{cases} \quad (2.1)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ v & l_S & v & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & e_{11} & 0 \\ b_2 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -T_{S\beta} & -T_{Sr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2K_p c_f \eta_t}{R_S} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Les entrées sont représentées par  $e_v = [\delta_f, f_w, \rho_{ref}]^T$ , où  $\delta_f$  est l'angle de braquage des roues avant,  $f_w$  est la force du vent latéral et  $\rho_{ref}$  est la courbure de la route.  $\rho_{ref}$  et  $f_w$  sont les perturbations. Le vecteur des sorties est

$z_v = [\psi_L, y_L, T_S]^T$ . La dernière sortie constitue le couple d'auto-alignement des roues avant  $T_s$ . Les coefficients intervenant dans les matrices sont définis ci-après à partir des paramètres donnés dans la nomenclature du paragraphe 1.8.1 :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -\frac{2(c_r+c_f)}{mv} & a_{12} &= -1 + \frac{2(l_r c_r - l_f c_f)}{mv^2} \\
 a_{21} &= \frac{2(l_r c_r - l_f c_f)}{J} & a_{22} &= -\frac{2(l_r^2 c_r + l_f^2 c_f)}{Jv} \\
 c_r &= c_{r0} \cdot \nu & c_f &= c_{f0} \cdot \nu \\
 b_1 &= \frac{2c_f}{mv} & b_2 &= \frac{2c_f l_f}{J} \\
 e_{11} &= \frac{1}{mv} & e_{22} &= \frac{l_w}{J} \\
 T_{S\beta} &= \frac{2K_p c_f \eta_t}{R_S} & T_{Sr} &= \frac{2K_p c_f l_f \eta_t}{R_{Sv}}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le modèle de la colonne de direction est donné au paragraphe 1.7 ainsi que sur la Figure 1-10. Une représentation d'état du modèle de la colonne de direction est alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_d = A_d \cdot x_d + B_{d1} \cdot T_a + B_{d2} \cdot T_d + B_{d3} \cdot T_S \\ \delta_f = C_d \cdot x_d \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\delta}_d \\ \ddot{\delta}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B_s}{I_s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_d \\ \dot{\delta}_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_s} & \frac{1}{I_s} & -\frac{1}{I_s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_a \\ T_d \\ T_S \end{pmatrix} \\ \delta_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_S} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_d \\ \dot{\delta}_d \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.6}$$

Enfin, le modèle conducteur vient compléter la structure adoptée pour la synthèse du correcteur (Figure 1-11). La représentation d'état du modèle conducteur est alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c \cdot x_c + B_{c1} \cdot T_a + B_{c2} \cdot \psi_L + B_{c3} \cdot y_L \\ T_d = C_c \cdot x_c \end{cases} \tag{2.7}$$

Soit :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2\omega_n^2}{\tau_p} \\ 1 & 0 & -(\omega_n^2 + \frac{4}{\tau_p} \xi \omega_n) \\ 0 & 1 & -(2\xi \omega_n + \frac{2}{\tau_p}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2\omega_n^2}{\tau_p} K_F \\ \omega_n^2 K_F \\ 0 \end{pmatrix} \cdot T_a \\ \quad + \begin{pmatrix} \frac{2\omega_n^2}{\tau_p} \\ (\frac{2\tau_L}{\tau_p} - 1)\omega_n^2 \\ -\tau_L \omega_n^2 \end{pmatrix} \cdot K_L (\psi_L + \frac{y_L}{l_S}) \\ T_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.8}$$

Le modèle global est constitué de l'assemblage des modèles du conducteur, de la colonne de direction et du véhicule. L'entrée de commande est le couple d'assistance  $T_a$ . Le nombre de variables d'état est 9.

On supposera par la suite que les seules mesures disponibles pour le bouclage sont  $y_L$ ,  $\psi_L$  et la vitesse longitudinale  $v$ . Les deux premières sont supposées fournies par deux algorithmes de vision exécutés en temps réel en utilisant une mono caméra embarquée sur le véhicule. La Figure 2-1 présente le schéma en boucle fermée de la stratégie adoptée compte tenu de ces différents éléments.

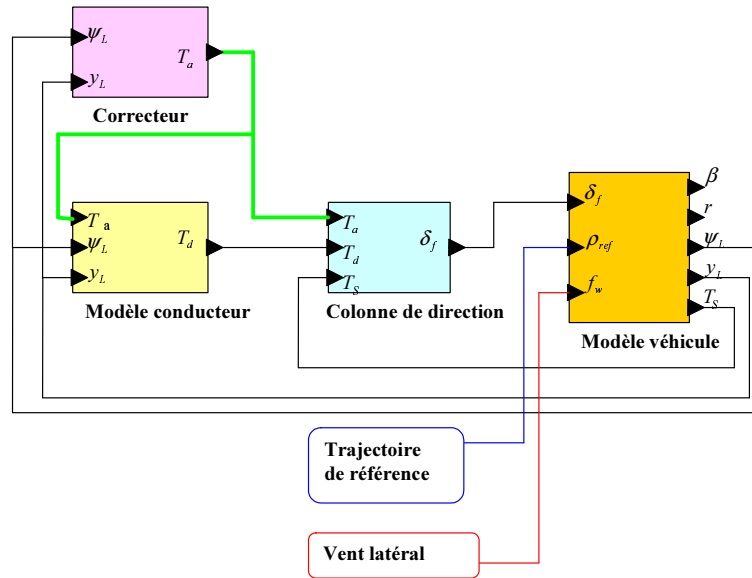


FIG. 2-1 – Stratégie d'assistance en boucle fermée

## 2.3 Objectifs de commande

Le dispositif d'assistance en latéral doit être en mesure d'agir lors des deux manoeuvres principales que sont le maintien de voie et le changement de voie, en ligne droite ou en courbe. Vis à vis des perturbations énoncées ci-dessus, l'objectif est de réguler  $y_L$  et  $\psi_L$  à zéro :  $y_L = 0$  signifie que le point de visée à la distance  $l_s$  en avant est exactement sur l'axe du véhicule et  $\psi_L = 0$  signifie que le véhicule est localement tangent à l'axe de la route. Plus précisément, on cherche à satisfaire les performances suivantes :

- ★ écart entre la position latérale du véhicule et le centre de la voie  $< 20$  cm.

- ★ erreur sur l'angle de cap  $< 0,01$  radian.
- ★ accélération latérale  $< 0,2g$  soit  $1,92 \text{ m.s}^{-2}$  pour le confort et la sécurité des passagers.
- ★ amplitude de  $T_a < 10 \text{ N.m}$ .

Certains paramètres sont incertains (adhérence des pneumatiques, caractéristiques du conducteur [Mam01], [MK02]) et d'autres sont variables comme la vitesse longitudinale. Il s'agit donc d'un problème de stabilisation robuste par rapport aux variations de paramètres et de rejet de perturbations.

## 2.4 Synthèse $H_\infty$

La méthodologie de synthèse adoptée est fondée sur les principes de l'optimisation  $H_\infty$ . L'entrée de commande se présente sous la forme suivante :

$$T_a(s) = K(s).Z(s) \quad (2.9)$$

avec  $z = [y_L, \psi_L]^T$ . Les lettres majuscules représentent les transformées de Laplace.

Les objectifs de commande sont pris en compte par l'introduction de filtres  $W_i$ , qui représentent des pondérations fréquentielles appliquées sur différents signaux. Ils sont utilisés ici pour pondérer la commande et les sorties afin d'assurer les performances et de bonnes marges de stabilité au système en boucle fermée.

La Figure 2-2 présente le schéma en boucle ouverte utilisé pour la synthèse dans lequel les signaux à contrôler sont  $y_L$ ,  $\psi_L$  et  $T_a$ , vis à vis de la perturbation  $f_w$ . Le correcteur utilise les 2 mesures disponibles  $y_L$  et  $\psi_L$ . Il faut noter que le modèle Conducteur+Actionneur+Véhicule dépend de la vitesse longitudinale  $v$  et de l'adhérence  $\nu$ . Ces paramètres interviennent dans les coefficients de la représentation d'état (2.1). Pour la synthèse  $H_\infty$ , on a choisit une vitesse  $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$  dans le but d'élaborer d'abord une assistance à basse vitesse. L'adhérence des pneumatiques sur la route vaut  $\nu = 0,8$  ce qui correspond à une chaussée imparfaitement sèche.

Les fonctions  $W_i$ ,  $i = 1...5$  sont des filtres du premier ordre paramétrés par un gain statique  $G_0$ , un gain à l'infini  $G_\infty$  et une pulsation  $\omega_0$ , dont l'expression est la suivante :

$$W_i(s) = \frac{G_\infty \sqrt{|G_0^2 - 1|} s + G_0 \omega_0 \sqrt{|G_\infty^2 - 1|}}{\sqrt{|G_0^2 - 1|} s + \omega_0 \sqrt{|G_\infty^2 - 1|}} \quad (2.10)$$



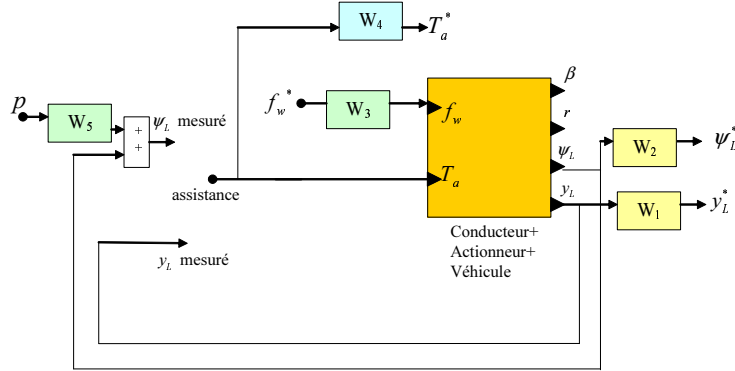


FIG. 2-2 – Schéma de synthèse du correcteur

Le correcteur  $K(s)$  (qui rappelons-le s'intègre entre les mesures  $\psi_L$ ,  $y_L$  et la commande  $T_a$ ) minimise au sens de la norme  $H_\infty$  le transfert entre les entrées  $f_w^*$ ,  $p$ ,  $T_a$  et les sorties après pondération  $y_L^*$ ,  $\psi_L^*$  et  $T_a^*$  :

$$\min \|T_{zw}\|_\infty ; z = [y_L^*, \psi_L^*, T_a^*]^T ; w = [f_w^*, p]^T \quad (2.11)$$

Le choix des paramètres intervenant dans les filtres  $W_i$  résulte d'une méthodologie systématique et reproductible dont les étapes sont présentées ci-dessous :

- i) Choix des filtres  $W_1$  et  $W_2$  de façon à satisfaire les objectifs de précision pour les grandeurs régulées (respectivement  $y_L$  et  $\psi_L$ ). L'action des filtres doit donc être apportée en basse fréquence, grâce au paramètre  $G_0$
- ii) Choix de la pulsation  $\omega_0$  pour le filtre  $W_1$ . Cette pulsation doit permettre au système en boucle fermée d'obtenir des réponses plus rapides. Elle peut être également perçue comme la pulsation au-delà de laquelle on évite de solliciter les dynamiques négligées.
- iii)  $W_3$  permet de régler l'atténuation en basse fréquence. Il règle le comportement transitoire en réponse à une perturbation.
- iv)  $W_4$  pondère la commande, en pénalisant un peu plus fortement les basses fréquences (dans ce domaine, le conducteur doit rester maître du véhicule). Il introduit des contraintes de sorte que la commande soit efficace dans la bande passante de l'asservissement et que l'actionneur soit sollicité dans ses limites mécaniques de fonctionnement.
- v)  $W_5$  qui est choisi constant constitue un degré de liberté supplémentaire

dans le choix de l'importance des mesures intervenant dans l'asservissement (plus  $W_5$  est grand, moins le correcteur tient compte de  $\psi_L$ ).

Après différents essais, les paramètres choisis sont :

Filtre	$G_0$	$G_\infty$	$\omega_0$ (rad.s <sup>-1</sup> )
$W_1$	300	2	100
$W_2$	10	10	
$W_3$	20	10	10
$W_4$	30	5	10
$W_5$	0,1	0,1	

L'algorithme donne  $\gamma_{opt} = 2,70$  et un correcteur d'ordre 13. Une analyse fréquentielle du correcteur  $H_\infty$  synthétisé est présentée ci-après.

La Figure 2-3 présente les diagrammes de Bode des transferts  $|\frac{y_L}{f_w}|$  et  $|\frac{T_a}{f_w}|$  (ligne pointillée). Ceux-ci sont comparés aux contraintes introduites par les filtres de pondération (en trait plein).

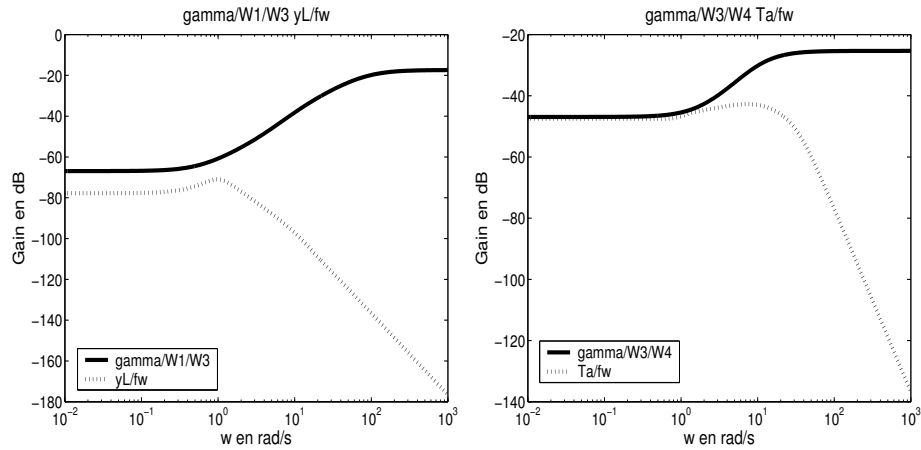
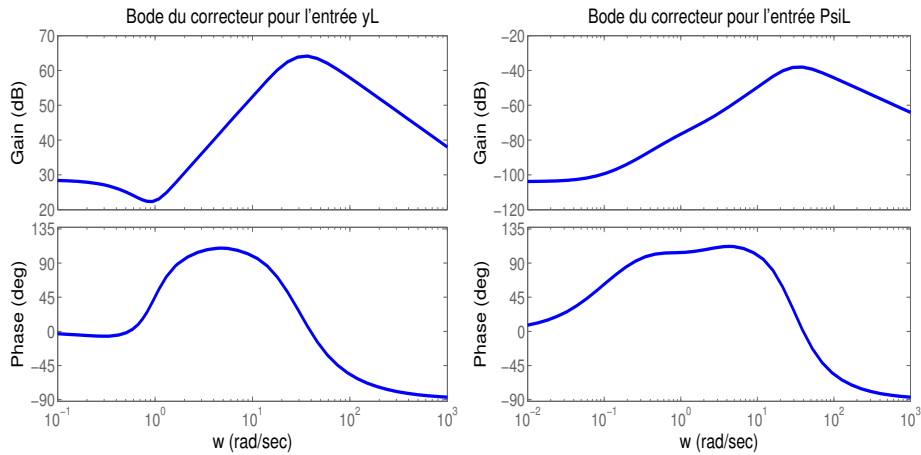


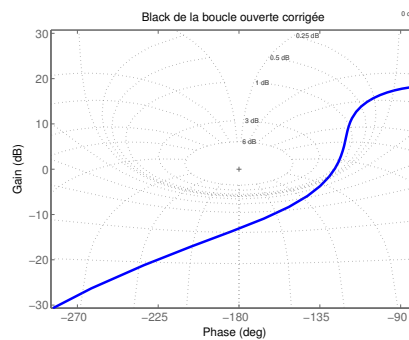
FIG. 2-3 – Analyse fréquentielle (a)  $|\frac{y_L}{f_w}|$  et (b)  $|\frac{T_a}{f_w}|$

Les diagrammes de Bode du correcteur sont présentés sur la Figure 2-4. Le diagramme de Bode du correcteur relatif à l'entrée  $y_L$  (Figure 2-4 a) présente de faibles gains aux basses fréquences. Cette propriété satisfait exactement les exigences du contrôle partagé dans la mesure où dans le domaine des basses fréquences, le conducteur doit être capable de manoeuvrer seul le véhicule. De plus, le diagramme de Bode relatif à l'entrée

FIG. 2-4 – Diagrammes de Bode du correcteur (a)entrée  $y_L$ , (b)entrée  $\psi_L$ 

$\psi_L$  (Figure 2-4 b) est caractérisé par de très faibles gains : on peut en déduire que l'assistance utilise fortement la mesure  $y_L$ .

Le diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée est présenté sur la Figure 2-5. Il met en évidence de bonnes marges de phase et de gain (de l'ordre de  $55^\circ$  et  $15dB$ ), ce qui permet d'espérer de bonnes propriétés de robustesse du système en boucle fermée.

FIG. 2-5 – Diagramme de Black du correcteur  $H_\infty$ 

### Comparaison des synthèses avec $W_2 = 0$ et $W_2 \neq 0$

Nous comparons maintenant 2 synthèses correspondant respectivement à  $W_2 = 0$  et  $W_2$  égal à la valeur précédente. Dans le premier cas, la synthèse n'impose donc pas de contrainte sur l'angle de cap.

Alors que le véhicule se déplace en ligne droite, une rafale de vent latérale d'une intensité de 500 N, dont l'allure est représentée sur la Figure 2-6, lui

est appliquée.

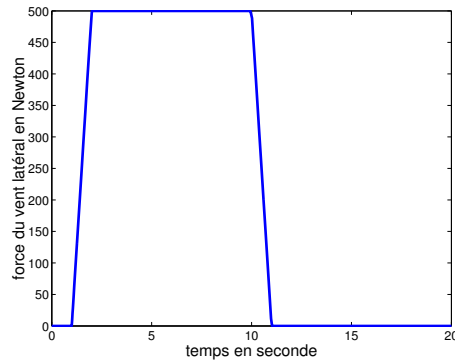


FIG. 2-6 – Rafale de vent latéral

Après synthèses, les correcteurs tels que  $W_2 = 0$  et  $W_2 \neq 0$  sont testés dans les mêmes conditions. Les résultats de simulation sont exposés sur la Figure 2-7. Les réponses obtenues avec le correcteur pour  $W_2 \neq 0$  (en ligne

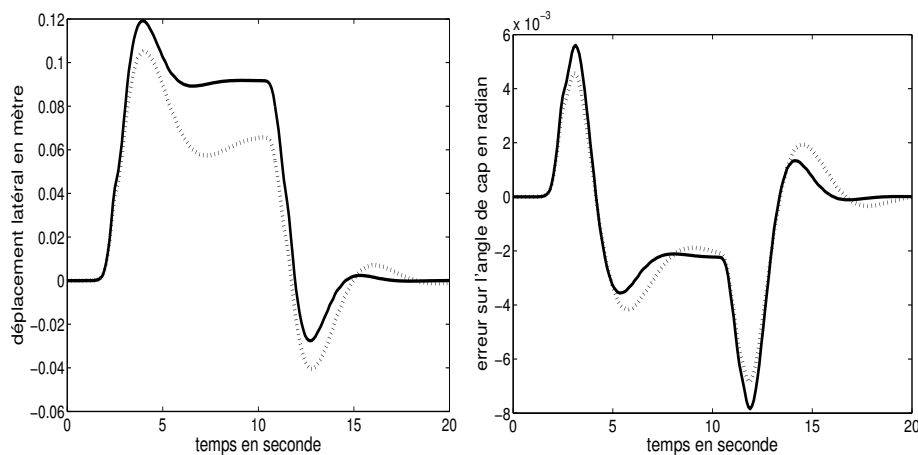


FIG. 2-7 – (a) déplacement latéral (b) erreur sur l'angle de cap, trait plein : correcteur  $W_2 = 0$ , trait pointillé : correcteur  $W_2 \neq 0$

pointillée) sont meilleures que celles du correcteur pour  $W_2 = 0$  (en trait plein). De plus, le couple d'assistance  $T_a$  reste inférieur à  $3N.m$  comme le montre la Figure 2-8 (a), ce qui est compatible avec les actionneurs de direction actuels. L'accélération latérale respecte le critère de confort (Figure 2-8 (b)). Il est à noter que le correcteur synthétisé avec  $W_2 = 0$  respecte les spécifications mais que celui pour lequel  $W_2 \neq 0$  permet sans complexité supplémentaire (c'est à dire avec un correcteur de même ordre et conser-

vant les mêmes entrées et sortie) d'améliorer encore un peu les résultats. Ce dernier correcteur est conservé et utilisé dans la suite.

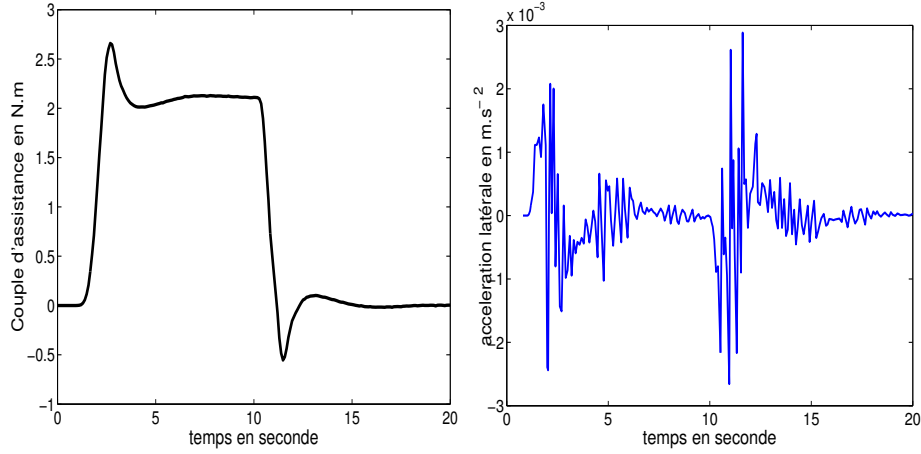


FIG. 2-8 – (a) Couple d'assistance  $T_a$  (b) Accélération latérale lorsque  $W_2 \neq 0$

**Remarque 2.4.1.** On n'a pas pris l'accélération latérale parmi les sorties à réguler car d'une part celle-ci est indirectement contrôlée par  $y_L$ , d'autre part les résultats présentés dans 4.2 montrent que la spécification est largement respectée.

## 2.5 Réduction d'ordre du correcteur

Les méthodes de réduction présentées au chapitre 4 sont testées sur le correcteur  $H_\infty$  d'ordre plein synthétisé en 2.4.

Pour la réduction par troncature des valeurs singulières de Hankel, dont les valeurs sont reportées dans le tableau 2.5, nous avons choisi un correcteur d'ordre 4 avec conservation du gain statique.

Tableau 2.5 : Valeurs singulières de Hankel

$n^\circ$	Valeurs singulières de Hankel
1	624,6
2	548,2
3	79,01
4	7,47
5	2,171
6	1,979
7	0,1678
8	9,558e-2
9	5,569e-3
10	6,074e-4
11	8,861e-005
12	4,256e-005
13	4,411e-006

Pour la réduction par agrégation modale, nous avons choisi un correcteur d'ordre 7. Les valeurs propres et énergies associées sont indiquées dans le tableau 2.6.

Tableau 2.6 : Valeurs propres du correcteur et énergies associées

$n^\circ$	Valeurs propres	Energies
1/2	$-23,76 \pm 23,13i$	1,44e+5
3/4	$-19,81 \pm 11,45i$	50,1
5/6	$-13,40 \pm 9,70i$	6,48e+4
7/8	$-7,18 \pm 7,14i$	1,97e+3
9	-7,55	185
10	-4,55	3,44
11	-1,96	3,47
12	-1,07	0,412
13	-0,58	307

Conformément à la stratégie du choix des modes présentée au paragraphe 4.1.1.1, les modes retenus sont ceux dont les énergies sont les plus importantes. Les valeurs propres du correcteur retenues sont donc celles

numérotées 1/2, 5/6, 7/8 et 13.

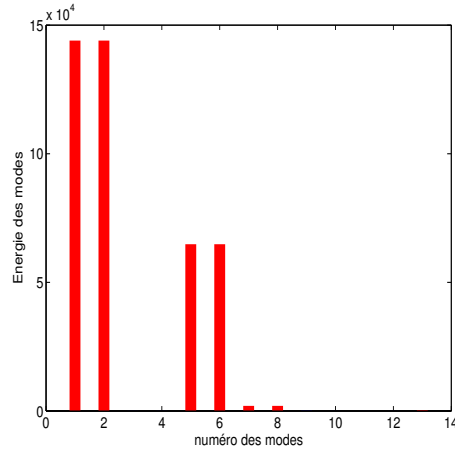
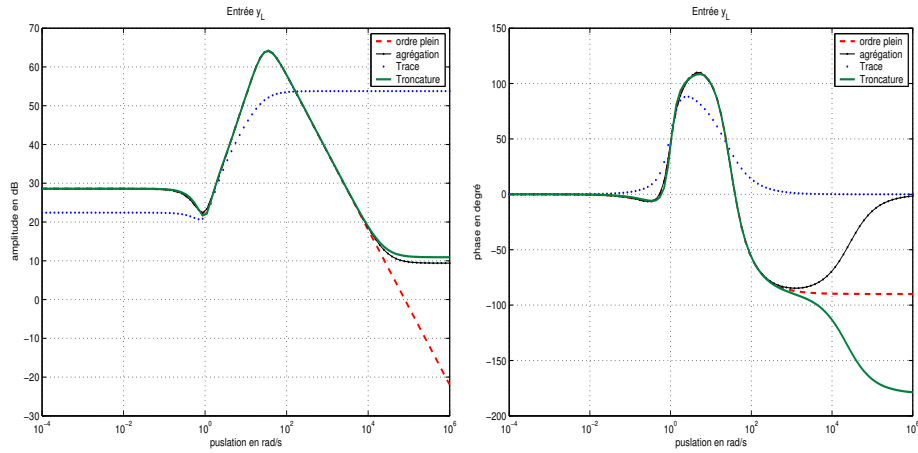
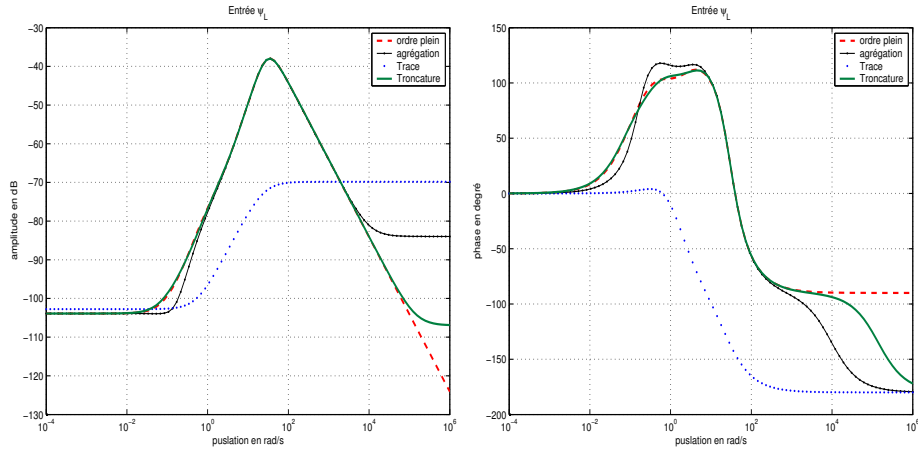


FIG. 2-9 – Modes et énergies associées

La Figure 2-9 est une représentation graphique de l'énergie des modes et met en évidence ceux qui peuvent être retenus à savoir ceux dont l'énergie associée est la plus importante. Pour la synthèse avec contrainte d'ordre par l'algorithme de la trace, nous avons choisi les mêmes filtres  $W_1$  à  $W_5$  donnés au paragraphe 2.4, avec  $\gamma = 2,7$  (soit la même valeur que le  $\gamma$  fourni par la synthèse d'ordre plein). L'algorithme conduit à un correcteur d'ordre 4. La sélection d'un correcteur d'ordre réduit constitue ici un compromis entre une complexité réduite du correcteur et des réponses fréquentielles satisfaisantes vis à vis de celles du correcteur d'ordre plein.

Les Figures 2-10, 2-11 et 2-12 présentent une étude fréquentielle comparative entre le correcteur d'ordre plein ( $n = 13$ ) et les correcteurs réduits déterminés par troncature des valeurs singulières de Hankel ( $r = 4$ ), par agrégation modale ( $r = 7$ ) et par l'algorithme de minimisation de la trace ( $r = 4$ ). Les réponses fréquentielles des correcteurs obtenus par troncature et par agrégation sont pratiquement identiques et ne diffèrent de celles du correcteur d'ordre plein qu'en hautes fréquences. Les réponses du correcteur obtenu par l'algorithme de la trace diffèrent davantage, mais il est intéressant de constater que tous ces correcteurs conduisent à des réponses fréquentielles de la boucle ouverte (Figure 2-12) sensiblement identiques.

FIG. 2-10 – Diagrammes de Bode des correcteurs : Entrée  $y_L$ FIG. 2-11 – Diagrammes de Bode des correcteurs : Entrée  $\psi_L$ 

Compte tenu de ces résultats, la troncature par valeurs singulières de Hankel fournit le meilleur compromis entre efficacité de la réduction et temps de calcul nécessaire.

De plus, d'autres algorithmes de réduction ont été testés dans le cadre de l'application. Cette étude a fait l'objet d'un stage effectué par Luca Palladino [Pal03].

Une fois le correcteur initial réduit, la loi de commande  $H_\infty$  peut être implantée sur ordinateur pour être appliquée expérimentalement. Des résultats de simulation plus complets seront donnés au chapitre 4.

Dans le but d'améliorer les performances de la stratégie de commande, les



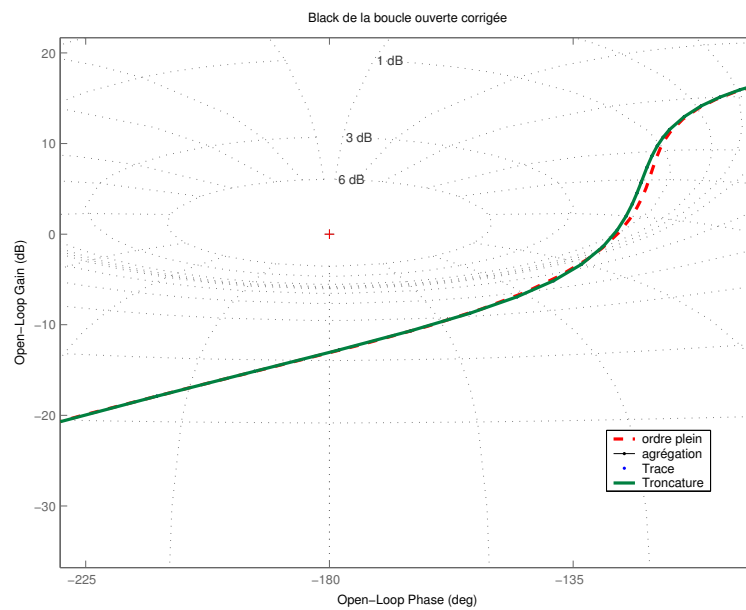


FIG. 2-12 – Diagrammes de Black de la boucle ouverte corrigée

méthodes de séquençement de gain en fonction de la vitesse longitudinale sont mise en oeuvre dans le chapitre 3.

## Chapitre 3

# Synthèse de correcteur séquencé par la vitesse longitudinale

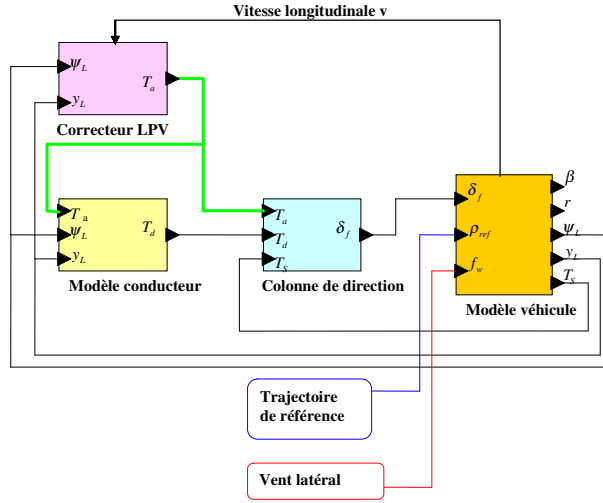
### 3.1 Introduction

Lorsque un ou plusieurs paramètres du système sont accessibles à la mesure, il est d'usage d'adapter le correcteur en fonction de la valeur de ces paramètres. Dans la littérature anglo-saxonne, cette stratégie est appelée "gain scheduling", et dans la littérature française "séquencement de gain". Ici, le paramètre variant le plus naturel est la vitesse longitudinale du véhicule car il peut être mesuré en temps réel.

Il existe de nombreuses méthodes de séquencement et celles-ci ont prouvé leur efficacité lors de leur application à de multiples problèmes [AG95], [AGB95], [Hir99], [DG98]. A ce jour, les résultats théoriques sur le choix des méthodes de séquencement sont relativement récents et font l'objet d'une activité de recherche qui se poursuit [PAA00].

Dans ce qui suit, nous reprenons la stratégie de commande retenue dans le chapitre précédent en la complétant pour obtenir un correcteur séquencé par la vitesse. La structure de la stratégie obtenue est présentée sur la Figure 3-1 : le correcteur doit élaborer le couple  $T_a$  à partir des mesures  $y_l$ ,  $\psi_l$  et  $v$ . Les perturbations sont essentiellement dues au vent latéral appliqué au modèle véhicule.

Nous examinons d'abord la méthodologie de synthèse LPV par l'ap-

FIG. 3-1 – Stratégie d'assistance  $H_\infty$ /LPV en boucle fermée

proche polytopique explicitée au chapitre 3 de la première partie de ce mémoire. Pour ce faire, un plan précis est adopté. D'abord, il tient à expliciter l'obtention d'une loi de commande  $H_\infty$ -LPV dans le cadre de l'application, puis le choix des pondérations LPV est justifié. Ensuite, le modèle augmenté LPV est écrit sous forme standard et le correcteur est synthétisé.

Une première analyse dans le domaine fréquentiel est proposée. Une analyse plus complète, avec des simulations dans différentes conditions, sera donnée dans le chapitre 4.

## 3.2 Méthodologie de la Synthèse LPV par approche polytopique

### 3.2.1 Ecriture du modèle sous forme LPV

Pour obtenir une loi de commande séquencée par la vitesse longitudinale du véhicule, la stratégie adoptée nécessite une écriture des équations d'état du système à commander sous forme affine en fonction du paramètre de séquencement  $\theta(t)$  et la mesure en temps réel de ce paramètre.

Dans le cas de l'assistance au contrôle latéral, les matrices d'état du système à commander ne sont pas affines en la vitesse. Néanmoins la plupart des coefficients qui interviennent dans les matrices (2.2) et (2.3) sont en  $\frac{1}{v}$ .

Nous avons donc choisi  $\frac{1}{v}$  comme paramètre de séquençement, puis nous avons construit la représentation d'état du système de manière que les matrices soient affines en approximant les termes en  $v$  et  $\frac{1}{v^2}$ , par un développement limité au premier ordre. En écrivant la vitesse longitudinale de la manière suivante :

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} \delta_v \quad (3.1)$$

où  $v_0$  et  $v_1$  sont fixes et  $\delta_v \in [-1; +1]$ , on a en effet :

$$\begin{aligned} v &\simeq v_0(1 - \frac{v_0}{v_1} \delta_v) \\ \frac{1}{v^2} &\simeq \frac{1}{v_0^2}(1 + 2\frac{v_0}{v_1} \delta_v) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Expérimentalement,  $\delta_v$  est déduit de la mesure en temps réel de la vitesse longitudinale  $v$ .

La synthèse consiste alors à choisir deux sommets correspondant aux vitesses  $v_{\pi_1}$  et  $v_{\pi_2}$  et à construire les matrices  $A_K(\pi_i)$ ,  $B_K(\pi_i)$ ,  $C_K(\pi_i)$ ,  $D_K(\pi_i)$  pour chaque sommet  $\pi_1$  et  $\pi_2$  par l'intermédiaire d'un système d'inégalités matricielles linéaires présenté au paragraphe 3.2 de la première partie. Comme dans une synthèse  $H_\infty$ , les objectifs de commande sont pris en compte par l'introduction de filtres  $W_i$ , qui représentent des pondérations fréquentielles appliquées sur différents signaux. Le choix des filtres dépend de la vitesse longitudinale correspondant à chaque sommet. Le paramétrage de ces derniers est effectué avant la synthèse des correcteurs aux sommets.

Le modèle augmenté LPV est obtenu à partir de la structure constituée du conducteur, de la colonne de direction et du modèle véhicule, présentée sur la Figure 3-2.

Pour utiliser la résolution par LMI, il convient de mettre sous forme standard le modèle augmenté dans lequel intervient le modèle LPV de véhicule. Le modèle paramétrique du véhicule est obtenu à partir de la représentation bicyclette linéaire d'ordre 4 dans laquelle la dépendance affine du paramètre variant est mise en évidence.

La représentation d'état du modèle véhicule sous forme LPV affine en  $\delta_v$  a pour vecteur d'état  $x_{vlpv} = [\beta, r, \psi_L, y_L]^T$  et s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_{vlpv} = (A_0 + A_1 \delta_v).x_{vlpv} + (B_0 + B_1 \delta_v).e_{vlpv} \\ z_{vlpv} = (C_0 + C_1 \delta_v).x_{vlpv} + D_0.e_{vlpv} \end{cases} \quad (3.3)$$

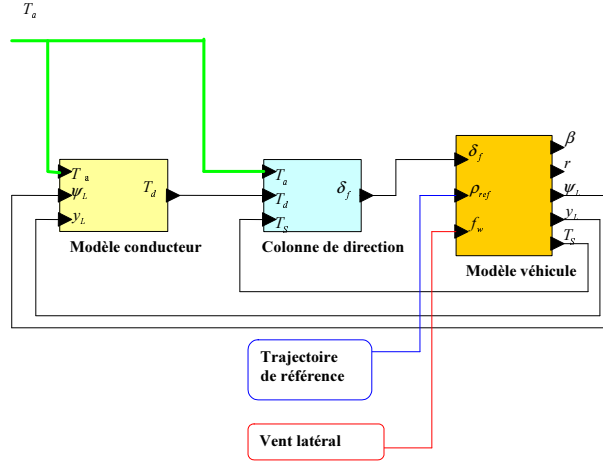


FIG. 3-2 – Modèle de synthèse en boucle ouverte

où

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \begin{pmatrix} -\frac{2(c_{r0}+c_{f0})\nu}{m} \frac{1}{v_0} & -1 + \frac{2\nu(l_r c_{r0} - l_f c_{f0})}{m} \frac{1}{v_0^2} & 0 & 0 \\ \frac{2(l_r c_{r0} - l_f c_{f0})\nu}{J} & -\frac{2\nu(l_r^2 c_{r0} + l_f^2 c_{f0})}{J} \frac{1}{v_0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_0 & l_S & v_0 & 0 \end{pmatrix} \\
 A_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{2(c_{r0}+c_{f0})\nu}{m} \frac{1}{v_1} & \frac{2\nu(l_r c_{r0} - l_f c_{f0})}{m} \frac{2}{v_0 v_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\nu(l_r^2 c_{r0} + l_f^2 c_{f0})}{J} \frac{1}{v_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_0^2}{v_1} & 0 & -\frac{v_0^2}{v_1} & 0 \end{pmatrix} \\
 B_0 &= \begin{pmatrix} \frac{2\nu c_{f0}}{m} \frac{1}{v_0} & \frac{1}{m} \frac{1}{v_0} \\ \frac{2l_f c_{f0}\nu}{J} & \frac{l_w}{J} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 B_1 &= \begin{pmatrix} \frac{2\nu c_{f0}}{m} \frac{1}{v_1} & \frac{1}{m} \frac{1}{v_1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{R_s} K_p \eta_t c_{f0} \nu & -\frac{2}{R_s v_0} K_p \eta_t c_{f0} l_f \nu & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 C_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{R_s v_1} K_p \eta_t c_{f0} l_f \nu & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 D_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2 K_p c_{f0} \eta_t \nu}{R_s} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

et  $e_{vlpv} = [\delta_f, f_w]^T$ , où  $\delta_f$  est l'angle de braquage des roues avant,  $f_w$  est la force de vent latéral.

Le modèle de synthèse LPV est alors formé. Il est représenté sur la Figure 3-3.

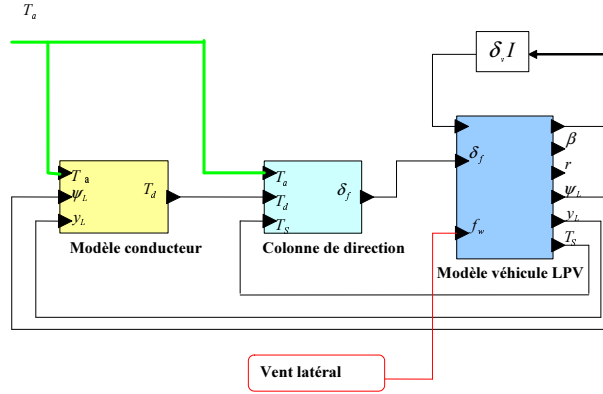


FIG. 3-3 – Modèle de synthèse LPV

La concaténation des trois modèles conducteur, colonne de direction et véhicule LPV, sous forme globale fournit le modèle de synthèse LPV présenté sur la Figure 3-4.

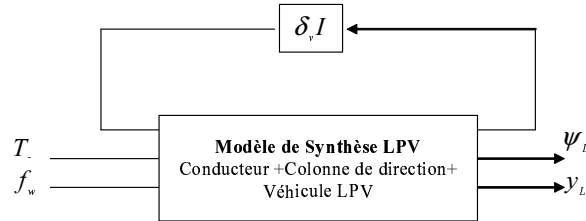


FIG. 3-4 – Modèle de synthèse LPV global

### 3.2.2 Paramétrage des pondérations LPV

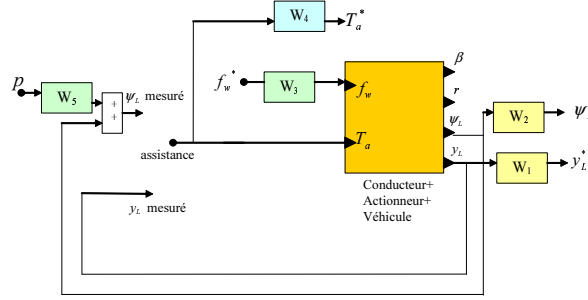


FIG. 3-5 – Système augmenté des pondérations

Dans un premier temps, nous avons choisi d'effectuer une synthèse en considérant comme sommets  $v_{\pi_1} = 10m.s^{-1}$  et  $v_{\pi_2} = 20m.s^{-1}$ . Comme le montre la Figure 3-5, les filtres  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  sont utilisés pour pondérer la commande et les sorties afin d'assurer les performances et de bonnes marges de stabilité au système en boucle fermée. Le choix des filtres est exposé au paragraphe 2.4 : ce sont des filtres du premier ordre paramétrés par un gain statique  $G_0$ , un gain à l'infini  $G_\infty$  et une pulsation  $\omega_0$ .

Pour les obtenir, on effectue plusieurs synthèses  $H_\infty$  linéaires sur les deux points de fonctionnement choisis. Les normes  $H_\infty$  obtenues sont surveillées de manière à les choisir du même ordre de grandeur pour toutes les synthèses c'est à dire entre 2,5 et 3. Cette étape permet de définir les filtres  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  sur chacun des deux sommets, qui sont pratiquement identiques (tableaux 3.1 et 3.2).

Filtre	$G_0$	$G_\infty$	$\omega_0$ (rad.s <sup>-1</sup> )
$W_1$	300	2	100
$W_2$	10	10	
$W_3$	20	10	10
$W_4$	30	5	10
$W_5$	0,1	0,1	

TAB. 3.1 – Paramétrage des filtres pour  $v_{\pi_1} = 10m.s^{-1}$

Filtre	$G_0$	$G_\infty$	$\omega_0$ (rad.s <sup>-1</sup> )
$W_1$	200	2	100
$W_2$	10	10	
$W_3$	20	10	10
$W_4$	30	5	10
$W_5$	0,1	0,1	

TAB. 3.2 – Paramétrage des filtres pour  $v_{\pi_2} = 20m.s^{-1}$ 

### 3.2.3 Construction du correcteur LPV d'ordre plein

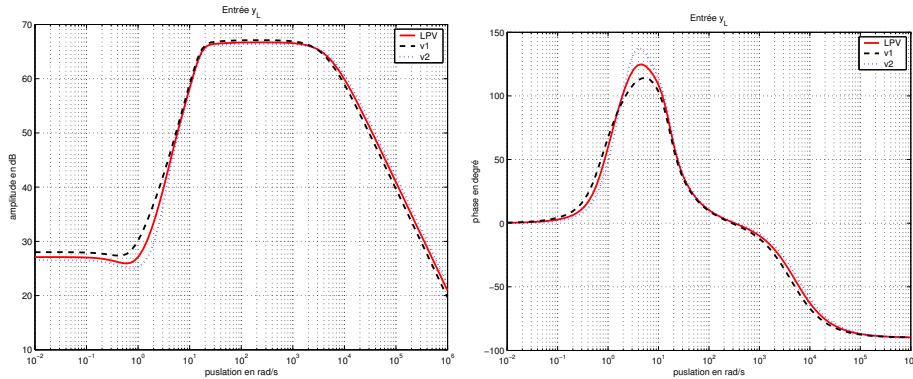
Le correcteur LPV est obtenu à partir du modèle de synthèse représenté sur la Figure 3-4. Il est calculé par résolution de LMI dont le principe est développé au chapitre 3 de la première partie.

Le correcteur final est à paramètre variant et s'adapte à toutes les trajectoires possibles du paramètre. Son expression est la suivante :

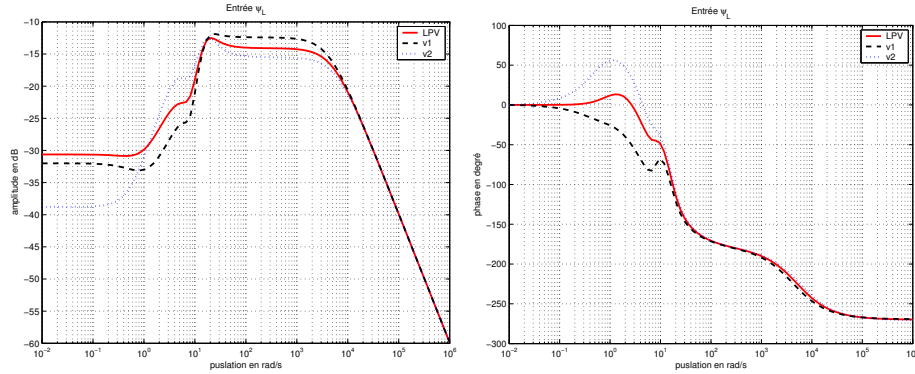
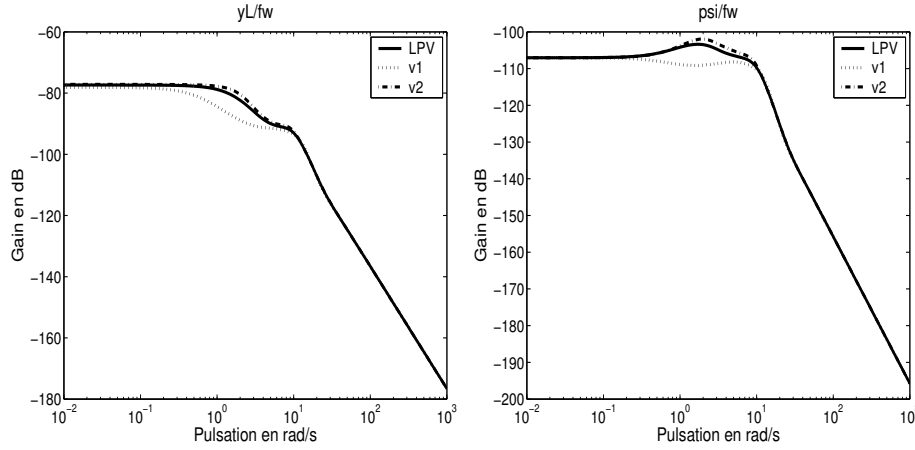
$$\left( \begin{array}{c|c} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ \hline C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{array} \right) = \left( \frac{\delta_v+1}{2} \right) \left( \begin{array}{c|c} A_K(\pi_1) & B_K(\pi_1) \\ \hline C_K(\pi_1) & D_K(\pi_1) \end{array} \right) + \left( \frac{1-\delta_v}{2} \right) \left( \begin{array}{c|c} A_K(\pi_2) & B_K(\pi_2) \\ \hline C_K(\pi_2) & D_K(\pi_2) \end{array} \right) \quad (3.6)$$

où  $\delta_v \in [-1; +1]$ .

La synthèse a été effectuée en considérant que la vitesse longitudinale du véhicule varie entre  $v_{\pi_1} = 10m.s^{-1}$  et  $v_{\pi_2} = 20m.s^{-1}$  et que les conditions d'adhérence des pneumatiques sur la route valent  $\nu = 0,8$ . L'algorithme donne  $\gamma_{opt} = 2,87$ . L'état du correcteur est de dimension 13.

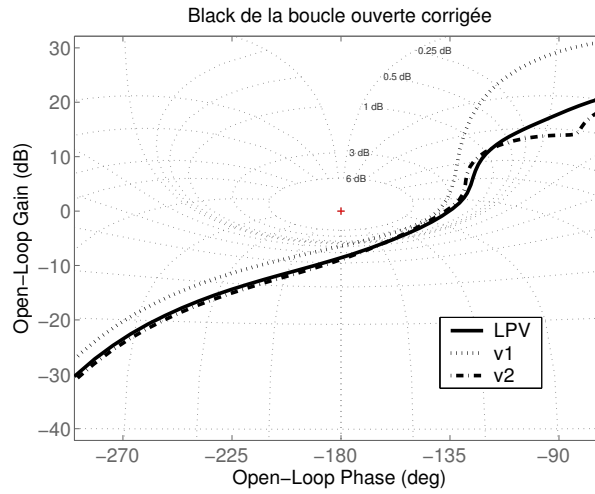

FIG. 3-6 – Diagramme de Bode du correcteur LPV pour l'entrée  $y_L$



FIG. 3-7 – Diagramme de Bode du correcteur LPV pour l'entrée  $\psi_L$ FIG. 3-8 – Analyse fréquentielle en boucle fermée (a)  $|\frac{y_L}{f_w}|$  et (b)  $|\frac{\psi_L}{f_w}|$ 

Les Figures 3-6 à 3-9 présentent une analyse fréquentielle du correcteur LPV, à vitesse fixe. La Figure 3-6 présente le diagramme de Bode du correcteur LPV pour l'entrée  $y_L$ , pour les sommets  $v_{\pi_1}$  (en ligne pointillée) et  $v_{\pi_2}$  (en ligne pointillée discontinue), et pour une vitesse intermédiaire  $v = 18 m.s^{-1}$  (en trait plein). La figure 3-7 présente de même le diagramme de Bode du correcteur pour l'entrée  $\psi_L$ . On voit sur ces figures que la réponse du correcteur évolue très régulièrement entre les 2 sommets, particulièrement pour l'entrée  $y_L$  qui reste prépondérante.

La Figure 3-8 présente de même les diagrammes de Bode des transferts  $|\frac{y_L}{f_w}|$  et  $|\frac{\psi_L}{f_w}|$  en boucle fermée. Ils sont particulièrement efficaces aux basses fréquences. En conséquence, il est donc fortement prévisible que le correcteur LPV améliore notablement le rejet des perturbations extérieures


FIG. 3-9 – Diagramme de Black du correcteur  $H_\infty$ /LPV (trait plein)

constituées par les forces de vent latéral.

Le diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée est présenté sur la Figure 3-9, toujours pour les mêmes valeurs de vitesse. Il met en évidence de bonnes marges de phase et de gain. On peut là aussi remarquer que ces différentes réponses fréquentielles varient de façon régulière avec la vitesse longitudinale. Il faut enfin souligner la continuité des réponses avec celles obtenues dans le cas  $H_\infty$  au paragraphe 2.4.

Nous avons choisi ici de nous limiter à un intervalle de vitesse pour lequel  $v \in [10m.s^{-1}; 20m.s^{-1}]$  ce qui correspond à des situations de conduite à faible et moyenne vitesses. Il est toutefois possible d'élargir ce domaine de variation à  $v \in [10m.s^{-1}; 30m.s^{-1}]$  en adoptant les filtres de pondération sur chaque sommet du polytope de manière à satisfaire les spécifications. L'algorithme fournit  $\gamma_{opt} = 3,01$  et la Figure 3-10 donne les diagrammes de Bode des transferts  $|\frac{y_L}{f_w}|$  et  $|\frac{\psi_L}{f_w}|$  en boucle fermée. Ils sont semblables à ceux de la Figure 3-8. On vérifie à ce stade par les réponses fréquentielles, que le correcteur LPV obtenu sur chaque sommet correspond à celui construit par synthèse  $H_\infty$  à vitesse fixe.

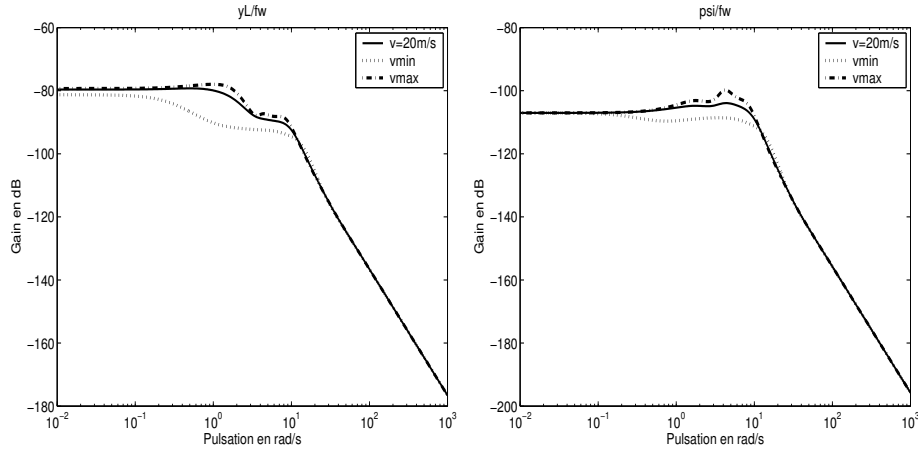


FIG. 3-10 – Analyse fréquentielle en boucle fermée (a)  $\left| \frac{y_L}{f_w} \right|$  et (b)  $\left| \frac{\psi_L}{f_w} \right|$

### 3.2.4 Construction du correcteur LPV avec contrainte d'ordre

La synthèse du correcteur LPV avec contrainte d'ordre s'appuie sur la méthodologie présentée au paragraphe 4.3 de la première partie.

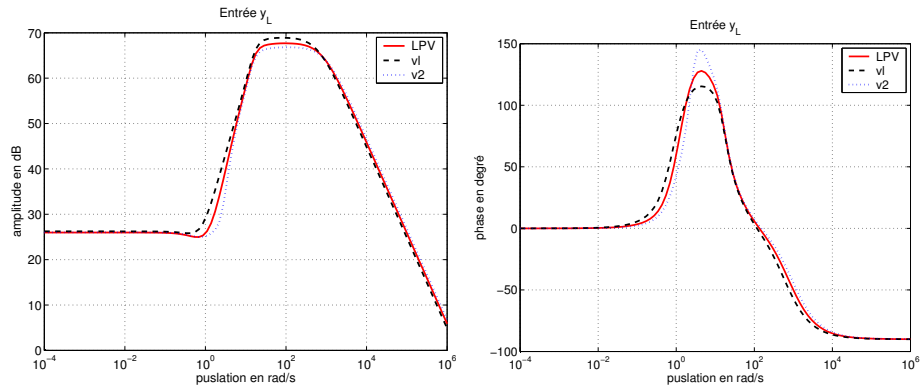
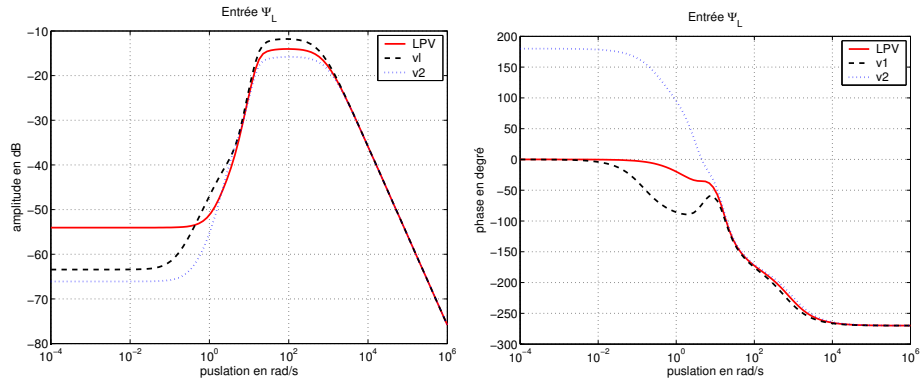
Le correcteur final est également à paramètre variant. Son expression est la suivante :

$$\left( \frac{A_{K_r}(\theta) \mid B_{K_r}(\theta)}{C_{K_r}(\theta) \mid D_{K_r}(\theta)} \right) = \left( \frac{\delta_v + 1}{2} \right) \left( \frac{A_{K_r}(\pi_1) \mid B_{K_r}(\pi_1)}{C_{K_r}(\pi_1) \mid D_{K_r}(\pi_1)} \right) + \left( \frac{1 - \delta_v}{2} \right) \left( \frac{A_{K_r}(\pi_2) \mid B_{K_r}(\pi_2)}{C_{K_r}(\pi_2) \mid D_{K_r}(\pi_2)} \right) \quad (3.7)$$

où  $\delta_v \in [-1; +1]$  et  $A_{K_r}, B_{K_r}, C_{K_r}, D_{K_r}$  sont les matrices de la représentation d'état du correcteur d'ordre réduit.

On considère toujours que la vitesse longitudinale du véhicule varie entre  $v_{\pi_1} = 10 \text{ m.s}^{-1}$  et  $v_{\pi_2} = 20 \text{ m.s}^{-1}$  et que les conditions d'adhérence des pneumatiques sur la route valent  $\nu = 0,8$ . La valeur de  $\gamma$  est recherchée par itération en utilisant l'algorithme 4.2.1. L'algorithme donne finalement  $\gamma = 3,1$ . L'état du correcteur séquencé est de dimension 11 car l'algorithme ne trouve pas de matrices  $R$  et  $S$  solutions du système de LMI, avec  $\text{rang}(RS - I)$  inférieur à cette valeur.

Les Figures 3-11 et 3-12 représentent dans les mêmes conditions qu'au paragraphe 3.2.3, une analyse fréquentielle du correcteur LPV réduit. On constate sur ces Figures que le correcteur séquencé d'ordre réduit possède des caractéristiques fréquentielles quasiment identiques à celles du correcteur LPV d'ordre plein. On peut noter que le tracé de la phase du correcteur


FIG. 3-11 – Diagramme de Bode du correcteur LPV réduit pour l'entrée  $y_L$ 

FIG. 3-12 – Diagramme de Bode du correcteur LPV réduit pour l'entrée  $\psi_L$ 

fixe obtenu à la vitesse  $v_{\pi_2} = 20m.s^{-1}$  présente un déphasage de  $180^\circ$  aux basses fréquences. Ceci n'a pas d'interprétation au sens automatique du terme mais constitue plutôt une erreur engendrée par le solveur.



## Chapitre 4

# Analyse et comparaison des 2 correcteurs $H_\infty$ et LPV

Les correcteurs obtenus doivent répondre aux exigences de performances et de robustesse du système en boucle fermée sur l'ensemble de la plage de variation de la vitesse longitudinale. Afin d'étudier le comportement des lois de commande, des analyses et comparaisons sont réalisées pour les deux stratégies adoptées. Nous commençons par une analyse de stabilité robuste, vis-à-vis des principales incertitudes paramétriques et du modèle conducteur. Nous poursuivons ensuite par des simulations non linéaires, dans différentes situations de conduite.

### 4.1 Analyse de stabilité robuste

Ce paragraphe est dédié à l'analyse de la stabilité robuste du système en boucle fermée par rapport aux variations paramétriques et aux incertitudes. Cette étude utilise les correcteurs d'ordre réduit construits par synthèse  $H_\infty$  standard et dont les développements sont présentés dans le paragraphe 2.4.

#### 4.1.1 Schéma de la $\mu$ -analyse

La mise en équation du modèle a nécessité plusieurs approximations, d'où résultent différentes incertitudes de modèle. L'outil mathématique constitué de la valeur singulière structurée est présenté en détail au chapitre 5 de la première partie. Cette analyse de robustesse est fondamentale car elle quantifie l'efficacité du correcteur compte tenu des incertitudes

qui affectent le véhicule, notamment des incertitudes paramétriques sur la masse, la vitesse et l'adhérence des pneumatiques, et des incertitudes dynamiques engendrées par les capacités physiologiques et le comportement du conducteur.

On rappelle que les correcteurs sont réduits à partir d'un correcteur synthétisé avec une adhérence  $\nu = 0,8$  et une vitesse longitudinale  $v = 10m/s$ .

Dans la suite, on tient compte des incertitudes réelles sur l'adhérence  $\nu$ , la vitesse  $v$ , la masse  $m$  et l'inertie  $J$  (qui est liée à la masse). Les incertitudes concernant le modèle conducteur sont traitées comme des dynamiques négligées.

Les différents paramètres utilisés dans l'analyse de robustesse sont pris en compte de la manière suivante.

L'adhérence a pour expression :

$$\begin{aligned}\nu &= \nu_0 + \nu_1 \delta_\nu \\ \delta_\nu &\in [-1; +1]\end{aligned}\tag{4.1}$$

L'intervalle de variation acceptable de l'adhérence correspond à  $\nu \in [0, 3; 1]$ , ce qui signifie que  $\nu_0 = 0,65$  et  $\nu_1 = 0,35$ .

De même, la vitesse est écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{1}{v} &= \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} \delta_v \\ \delta_v &\in [-1; +1]\end{aligned}\tag{4.2}$$

En choisissant  $v \in [8 \text{ m/s}; 12 \text{ m/s}]$ , on obtient  $\frac{1}{v_0} = 1,04.10^{-1} s/m$  et  $\frac{1}{v_1} = 2,08.10^{-2} s/m$ .

A noter que pour l'analyse de robustesse du correcteur  $H_\infty$  fixe, l'intervalle choisi pour  $v$  est volontairement limité et centré autour du point de fonctionnement  $v = 10m/s$ . Le correcteur final qui résulte d'une synthèse  $H_\infty$ -LPV est séquencé en fonction de la vitesse sur l'intervalle  $v \in [10 \text{ m/s}; 20 \text{ m/s}]$ .

La masse  $m$  est écrite de même :

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} &= \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} \delta_m \\ \delta_m &\in [-1; +1]\end{aligned}\tag{4.3}$$

Si on considère que la masse du véhicule est comprise entre 1350kg et 1650kg, il vient  $\frac{1}{m_0} = 6,73.10^{-4} kg^{-1}$  et  $\frac{1}{m_1} = 6,7.10^{-5} kg^{-1}$ .

A partir de la représentation d'état du modèle véhicule (2.1), la mise en équations de la  $\mu$ -analyse est élaborée. Les paramètres incertains étudiés qui interviennent dans le modèle véhicule, sont l'adhérence  $\nu$ , la vitesse longitudinale  $v$  et la masse du véhicule  $m$ . Il convient de les extraire, ce qui conduit aux développements suivants :

$$\begin{cases} \dot{\beta} = - \left[ \frac{2}{mv} (c_{r0} + c_{f0}) \nu \right] \beta - r + \left[ \frac{2}{mv^2} (l_r c_{r0} - l_f c_{f0}) \nu \right] r + \left[ \frac{2}{mv} c_{f0} \nu \right] \delta_f + \left[ \frac{1}{mv} \right] f_w \\ \dot{r} = \left[ \frac{2}{J} (l_r c_{r0} - l_f c_{f0}) \nu \right] \beta - \left[ \frac{2}{Jv} (l_r^2 c_{r0} + l_f^2 c_{f0}) \nu \right] r + \left[ \frac{2}{J} l_f c_{f0} \nu \right] \delta_f + \frac{l_w}{J} f_w \\ \dot{\psi}_L = r - v \rho_{ref} \\ \dot{y}_L = v \beta + l_s r + v \psi_L \\ T_s = - \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0} \nu}{R_s} \right] \beta - \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0} l_f \nu}{R_s v} \right] r + \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0} \nu}{R_s} \right] \delta_f \end{cases} \quad (4.4)$$

On pose tout d'abord :

$$\begin{cases} e_1 = \nu \beta \\ e_2 = \nu r \\ e_3 = \nu \delta_f \end{cases} \quad \begin{cases} s_1 = \beta \\ s_2 = r \\ s_3 = \delta_f \end{cases} \quad (4.5)$$

d'où :

$$\begin{cases} \dot{\beta} = - \left[ \frac{2}{mv} (c_{r0} + c_{f0}) \right] e_1 - r + \left[ \frac{2}{mv^2} (l_r c_{r0} - l_f c_{f0}) \right] e_2 + \left[ \frac{2}{mv} c_{f0} \right] e_3 + \left[ \frac{1}{mv} \right] f_w \\ \dot{r} = \left[ \frac{2}{J} (l_r c_{r0} - l_f c_{f0}) \right] e_1 - \left[ \frac{2}{Jv} (l_r^2 c_{r0} + l_f^2 c_{f0}) \right] e_2 + \left[ \frac{2}{J} l_f c_{f0} \right] e_3 + \frac{l_w}{J} f_w \\ \frac{1}{v} \dot{\psi}_L = \frac{1}{v} r - \rho_{ref} \\ \frac{1}{v} \dot{y}_L = \beta + \frac{l_s}{v} r + \psi_L \\ T_s = - \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0}}{R_s} \right] e_1 - \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0} l_f}{R_s v} \right] e_2 + \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0}}{R_s} \right] e_3 \end{cases} \quad (4.6)$$

Compte tenu du terme en  $\frac{1}{v^2}$  qui apparaît dans la première équation, on pose :

$$\begin{cases} e_4 = \frac{1}{v} e_2 \\ s_4 = e_2 \end{cases} \quad (4.7)$$

ce qui, en reportant (4.2) dans les troisième et quatrième équations, conduit à :



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} = - \left[ \frac{2}{mv} (c_{r0} + c_{f0}) \right] e_1 - r + \left[ \frac{2}{mv} (l_r c_{r0} - l_f c_{f0}) \right] e_4 + \left[ \frac{2}{mv} c_{f0} \right] e_3 + \left[ \frac{1}{mv} \right] f_w \\ \dot{r} = \left[ \frac{2}{J} (l_r c_{r0} - l_f c_{f0}) \right] e_1 - \left[ \frac{2}{J} (l_r^2 c_{r0} + l_f^2 c_{f0}) \right] e_4 + \left[ \frac{2}{J} l_f c_{f0} \right] e_3 + \frac{l_w}{J} f_w \\ (\frac{1}{v_0} + \delta_v)(\dot{\psi}_L - r) = -\rho_{ref} \\ (\frac{1}{v_0} + \delta_v)(\dot{y}_L - l_s r) = \beta + \psi_L \\ T_s = - \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0}}{R_S} \right] e_1 - \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0} l_f}{R_S} \right] e_4 + \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0}}{R_S} \right] e_3 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Il ne reste plus alors que des termes en  $\frac{1}{v}$ , en  $\delta_v$  et en  $\frac{1}{m}$ . On pose donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_5 = \frac{1}{v} [-2(c_{r0} + c_{f0})e_1 + 2(l_r c_{r0} - l_f c_{f0})e_4 + 2c_{f0}e_3 + f_w] \\ e_6 = \delta_v(\dot{\psi}_L - r) \\ e_7 = \delta_v(\dot{y}_L - l_s r) \\ \left\{ \begin{array}{l} s_5 = [-2(c_{r0} + c_{f0})e_1 + 2(l_r c_{r0} - l_f c_{f0})e_4 + 2c_{f0}e_3 + f_w] \\ s_6 = \dot{\psi}_L - r = -v_0 e_6 - v_0 \rho_{ref} \\ s_7 = \dot{y}_L - l_s r = -v_0 e_7 + v_0 \beta + v_0 \psi_L \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} = -r + \frac{1}{m} e_5 \\ \dot{r} = \left[ \frac{2}{J} (l_r c_{r0} - l_f c_{f0}) \right] e_1 - \left[ \frac{2}{J} (l_r^2 c_{r0} + l_f^2 c_{f0}) \right] e_4 + \left[ \frac{2}{J} l_f c_{f0} \right] e_3 + \frac{l_w}{J} f_w \\ \frac{1}{v_0}(\dot{\psi}_L - r) + e_6 = -\rho_{ref} \\ \frac{1}{v_0}(\dot{y}_L - l_s r) + e_7 = \beta + \psi_L \\ T_s = - \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0}}{R_S} \right] e_1 - \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0} l_f}{R_S} \right] e_4 + \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0}}{R_S} \right] e_3 \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Il ne reste plus qu'un terme en  $\frac{1}{m}$ . On pose donc :

$$e_8 = \frac{1}{m} e_5 \quad s_8 = e_5 \quad (4.11)$$

et on obtient finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} = -r + e_8 \\ \dot{r} = \left[ \frac{2}{J} (l_r c_{r0} - l_f c_{f0}) \right] e_1 - \left[ \frac{2}{J} (l_r^2 c_{r0} + l_f^2 c_{f0}) \right] e_4 + \left[ \frac{2}{J} l_f c_{f0} \right] e_3 + \frac{l_w}{J} f_w \\ \dot{\psi}_L = r - v_0 e_6 - v_0 \rho_{ref} \\ \dot{y}_L = l_s r - v_0 e_7 + v_0 \beta + v_0 \psi_L \\ T_s = - \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0}}{R_S} \right] e_1 - \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0} l_f}{R_S} \right] e_4 + \left[ \frac{2K_p \eta_t c_{f0}}{R_S} \right] e_3 \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Au total, on a donc défini les entrées et sorties :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \nu\beta \\ e_2 = \nu r \\ e_3 = \nu\delta_f \\ e_4 = \frac{1}{\nu}e_2 \\ e_5 = \frac{1}{\nu}[-2(c_{r0} + c_{f0})e_1 + 2(l_r c_{r0} - l_f c_{f0})e_4 + 2c_{f0}e_3 + f_w] \\ e_6 = \delta_v(\dot{\psi}_L - r) = \frac{1}{v_1}(\dot{\psi} - r) \\ e_7 = \delta_v(\dot{y}_L - l_S r) \\ e_8 = \frac{1}{m}e_5 \end{array} \right. \quad (4.13)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \beta \\ s_2 = r \\ s_3 = \delta_f \\ s_4 = e_2 \\ s_5 = [-2(c_{r0} + c_{f0})e_1 + 2(l_r c_{r0} - l_f c_{f0})e_4 + 2c_{f0}e_3 + f_w] \\ s_6 = \dot{\psi}_L - r = -v_0 e_6 - v_0 \rho_{ref} \\ s_7 = \dot{y}_L - l_S r = -v_0 e_7 + v_0 \beta + v_0 \psi_L \\ s_8 = e_5 \end{array} \right. \quad (4.14)$$

ce qui correspond à la représentation sous forme d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi}_L \\ \dot{y}_L \end{pmatrix} = A_0 \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ r \\ \psi_L \\ y_L \end{pmatrix} + B_0 \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ \delta_f \\ f_w \\ \rho_{ref} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_0 & l_S & v_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \left[\frac{2}{J}(l_r c_{r0} - l_f c_{f0})\right] & 0 & \left[\frac{2}{J}l_f c_{f0}\right] & -\left[\frac{2}{J}(l_r^2 c_{r0} + l_f^2 c_{f0})\right] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_w}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

L'équation de sortie est la suivante :

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \\ \psi_L \\ y_L \\ T_S \end{pmatrix} = C_0 \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ r \\ \psi_L \\ y_L \end{pmatrix} + D_0 \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ \delta_f \\ f_w \\ \rho_{ref} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_0 & 0 & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2(c_{r0} + c_{f0}) & 0 & 2c_{f0} & 2(l_r c_{r0} - l_f c_{f0}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left[\frac{2K_p \eta_t c_{f0}}{R_S}\right] & 0 & \left[\frac{2K_p \eta_t c_{f0}}{R_S}\right] & -\left[\frac{2K_p \eta_t l_f c_{f0}}{R_S}\right] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Il reste à reporter les expressions (4.1), (4.2) et (4.3) dans les définitions (4.13) des signaux  $e_1, \dots, e_5$  et  $e_8$ . On pose donc :

$$\begin{cases} e_1 = e'_1 + \nu_0 s_1 & e'_1 = \delta_\nu s'_1 & s'_1 = \nu_1 s_1 \\ e_2 = e'_2 + \nu_0 s_2 & e'_2 = \delta_\nu s'_2 & s'_2 = \nu_1 s_2 \\ e_3 = e'_3 + \nu_0 s_3 & e'_3 = \delta_\nu s'_3 & s'_3 = \nu_1 s_3 \\ e_4 = e'_4 + \frac{1}{v_0} s_4 & e'_4 = \delta_v s'_4 & s'_4 = \frac{1}{v_1} s_4 \\ e_5 = e'_5 + \frac{1}{v_0} s_5 & e'_5 = \delta_v s'_5 & s'_5 = \frac{1}{v_1} s_5 \\ e_8 = e'_8 + \frac{1}{m_0} s_8 & e'_8 = \delta_m s'_8 & s'_8 = \frac{1}{m_1} s_8 \end{cases} \quad (4.20)$$

La Figure 4-1 présente le schéma obtenu à partir de la mise en équations précédente.

Pour simplifier, nous n'avons pas fait figurer les incertitudes  $\delta_\nu$ ,  $\delta_v$ ,  $\delta_m$  qui bouclent les signaux  $s'_i$  sur les signaux  $e'_i$ . D'un point de vue pratique, c'est d'ailleurs exactement le schéma de la Figure 4-1 dont nous avons besoin pour l'analyse de robustesse. Il permet d'introduire les incertitudes sur la masse  $m$ , la vitesse  $v$  et l'adhérence  $\nu$ .

L'analyse de robustesse tient également compte des incertitudes de modélisation du conducteur. Pour ce faire, considérons la fonction de transfert nominale du conducteur  $G_0 = \frac{T_d}{y_L}$  pour laquelle  $\omega_n = 10$  rad/s et  $\tau_L = 1$  seconde.

Soit  $G = \frac{T_d}{y_L}$ , celle soumise à des incertitudes pour laquelle  $\omega_n$  et  $\tau_L$  varient tels que  $\omega_n \in [5 \text{ rad/s}; 15 \text{ rad/s}]$  et  $\tau_L \in [0,5 \text{ s}; 1,5 \text{ s}]$ . Alors, un filtre  $W_d$  est calculé pour satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{cases} G(s) = G_0(s)(1 + W_d(s)\Delta_d(s)) \\ \|\Delta_d(s)\|_\infty < 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

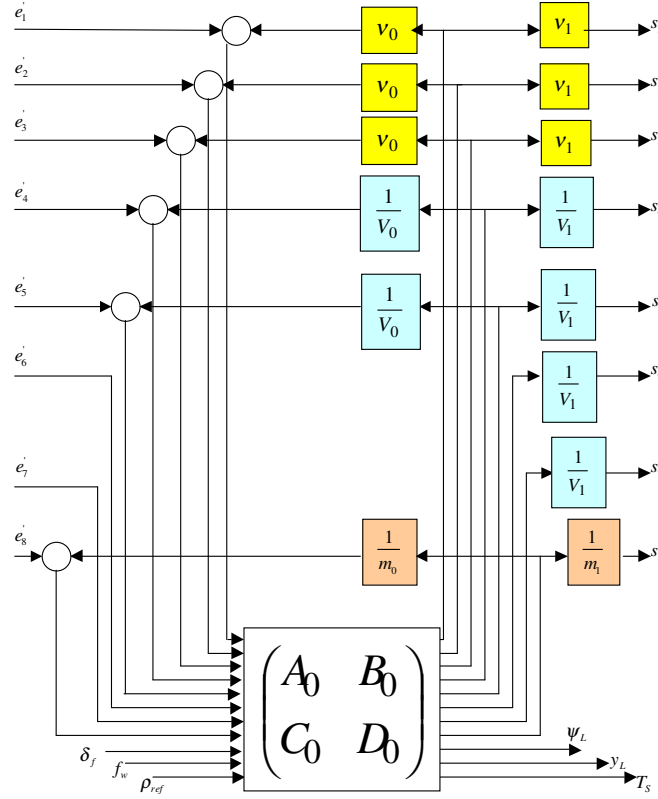


FIG. 4-1 – Analyse de robustesse

Pour ce faire, on représente d'abord fréquemment les diagrammes d'amplitude et de phase du transfert  $\frac{G}{G_0} - 1$ . La Figure 4-2 expose les diagrammes de  $\frac{G}{G_0} - 1$  pour les variations de  $\omega_n$  et  $\tau_L$  telles que  $\omega_n \in [5 \text{ rad/s}; 10 \text{ rad/s}]$  et  $\tau_L \in [0,5 \text{ s}; 0,9 \text{ s}]$ , pour l'entrée  $y_L$  du modèle conducteur.

De même, la Figure 4-3 présente les diagrammes d'amplitude et de phase du transfert  $\frac{G}{G_0} - 1$  sur les intervalles  $\omega_n \in [10 \text{ rad/s}; 15 \text{ rad/s}]$  et  $\tau_L \in [1,1 \text{ s}; 1,5 \text{ s}]$ , pour l'entrée  $y_L$  du modèle conducteur.

Selon l'allure des faisceaux de courbes tracés sur les Figures 4-2 et 4-3, on identifie un filtre  $W_d$  répondant aux exigences de (4.21). Celui-ci constitue une enveloppe de toutes les autres réponses comme le montre la Figure 4-4 où le filtre 1 est l'enveloppe du transfert  $\frac{G}{G_0} - 1$  de la Figure 4-2 et le filtre 2 celle du transfert  $\frac{G}{G_0} - 1$  de la Figure 4-3.  $W_d$  a alors pour expression :

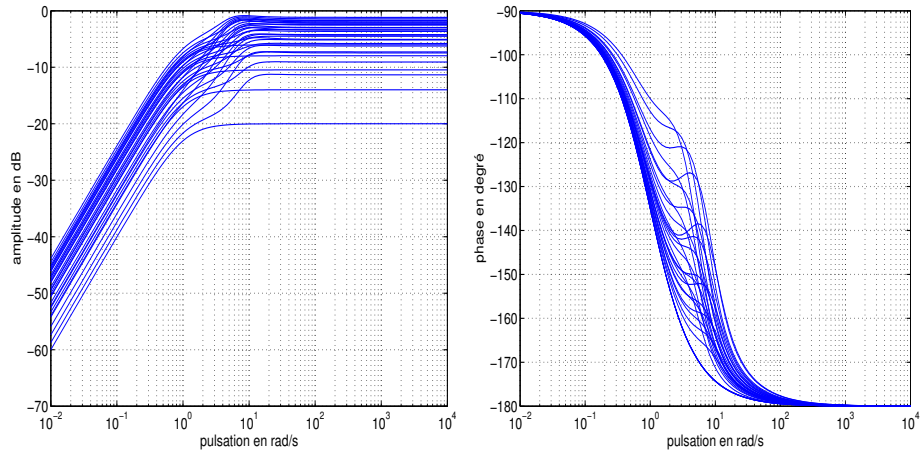


FIG. 4-2 – Représentation du transfert  $\frac{G}{G_0} - 1$  pour  $\omega_n \in [5 \text{ rad/s}; 10 \text{ rad/s}]$  et  $\tau_L \in [0,5 \text{ s}; 0,9 \text{ s}]$

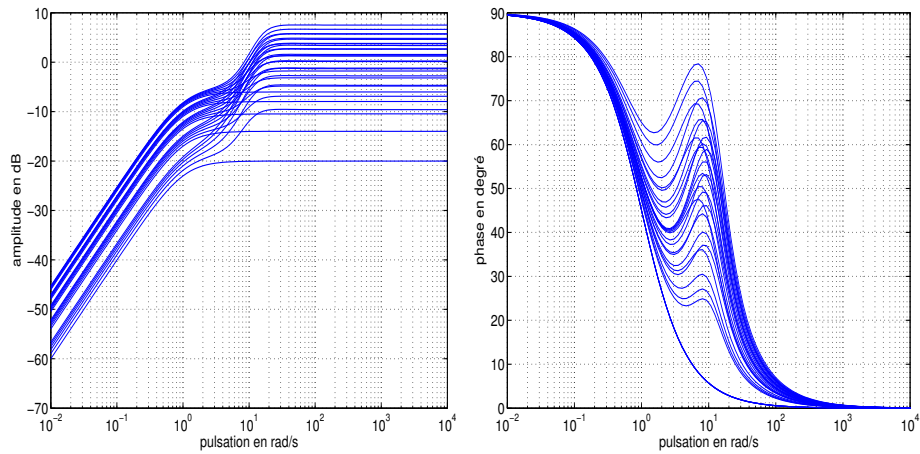


FIG. 4-3 – Représentation du transfert  $\frac{G}{G_0} - 1$  pour  $\omega_n \in [10 \text{ rad/s}; 15 \text{ rad/s}]$  et  $\tau_L \in [1,1 \text{ s}; 1,5 \text{ s}]$

$$W_d = 0,8 \cdot \frac{\frac{3}{5}s}{\frac{3}{5}s + 1} + 0,7 \cdot \frac{\frac{3}{80} \cdot 3,1s}{\frac{3}{80}s + 1} \quad (4.22)$$

Toutes ces incertitudes sont intégrées au schéma de la Figure 4-1 qui est ensuite bouclé par le correcteur.

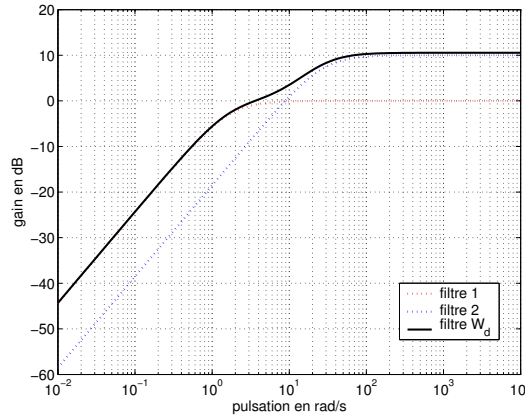


FIG. 4-4 – Amplitude du Filtre  $W_d$

#### 4.1.2 Résultats de la $\mu$ -analyse

Dans ce paragraphe, la  $\mu$ -analyse prend en compte toutes les incertitudes du modèle utilisé à savoir : l'adhérence, la vitesse, la masse, l'inertie et les incertitudes dynamiques du modèle conducteur. Les correcteurs utilisés sont les correcteurs réduits présentés au paragraphe 2.5. Les trois méthodes présentées au chapitre 5 de la première partie (échantillonnage en fréquence,  $\nu$ -analyse et scaling en fréquence) sont envisagées.

Pour l'application du scaling fréquentiel, un pas égal à  $5 \cdot 10^{-2}$  est choisi de manière à réduire les temps de calcul. L'analyse se concentre sur l'intervalle  $\omega \in [1 \text{ rad/s}; 10 \text{ rad/s}]$ . Il correspond au domaine dans lequel l'assistance au contrôle latéral doit répondre aux exigences de robustesse. On peut vérifier que les valeurs de la valeur singulière structurée sont beaucoup plus faibles en dehors de cet intervalle.

##### 4.1.2.1 Analyse des correcteurs réduits à posteriori en boucle ouverte

Deux algorithmes de réduction à posteriori en boucle ouverte ont été mis en oeuvre : les réductions par agrégation modale et par troncature des valeurs singulières de Hankel.

Pour le premier correcteur, la  $\mu$ -analyse donne le maximum de la valeur singulière structurée inférieur à 1,17 et la  $\nu$ -analyse fournit le maximum de la valeur singulière structurée dissymétrique inférieur à 1,19. La méthode du scaling donne le maximum de la borne supérieure à 1,2.

Pour le deuxième correcteur, ces valeurs sont respectivement égales à 1, 13, 1, 16 et 1, 15. Les représentations graphiques de la borne supérieure de la  $\mu$  par les trois méthodes d'analyse sont données par les Figures 4-5, 4-6.

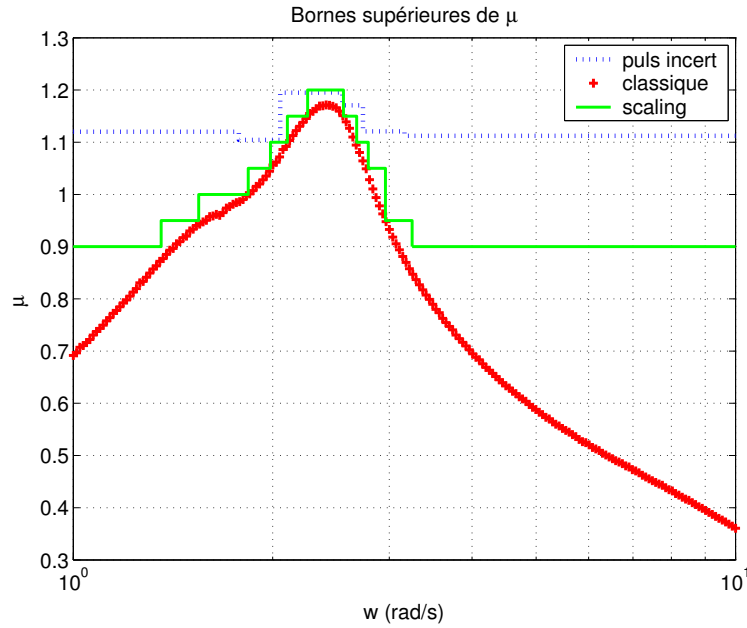


FIG. 4-5 –  $\bar{\mu}$  pour la réduction par agrégation

Avec le correcteur obtenu par troncature des valeurs singulières de Hankel, on peut affirmer, en se basant par exemple sur le majorant fourni par la  $\nu$ -analyse que la stabilité du système en boucle fermée est donc assurée pour tout  $\Delta(s)$  tel que :

$$\|\Delta(s)\|_{\infty} < 1/1,16 = 0,86 \quad (4.23)$$

En conséquence, les intervalles admissibles dans lesquels la stabilité est garantie sont les suivants :

$$\begin{cases} \nu \in [0,34; 0,95] \\ v \in [8,1m.s^{-1}; 11,6m.s^{-1}] \\ m \in [1368kg; 1625kg] \end{cases} \quad (4.24)$$

#### 4.1.2.2 Analyse d'un correcteur réduit, synthétisé par l'algorithme de minimisation de la trace

L'analyse de robustesse pour le correcteur réduit par l'algorithme de la Trace est représentée sur la Figure 4-7 sur l'intervalle  $\omega \in [1rad/s; 10rad/s]$ .



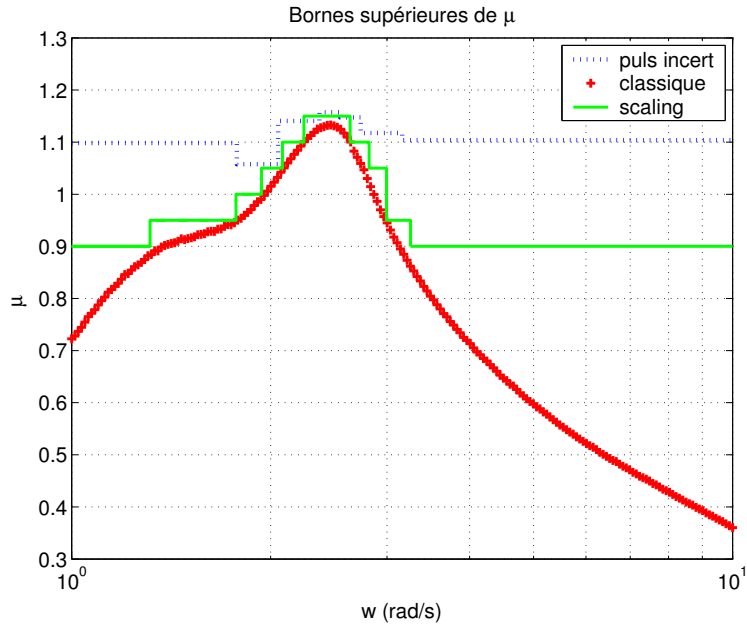


FIG. 4-6 –  $\bar{\mu}$  pour la réduction par troncature des valeurs singulières de Hankel

La  $\nu$ -analyse fournit ici comme majorant 1,05, tandis que la méthode du scaling donne 1.

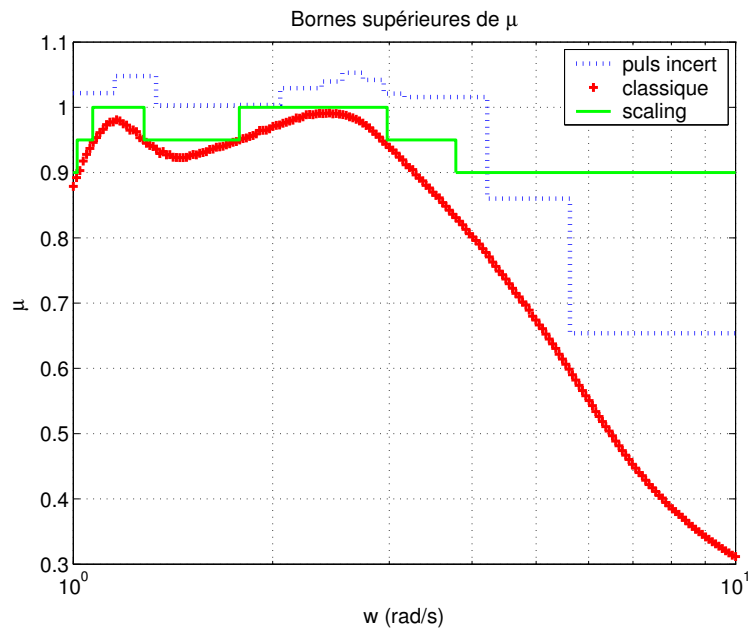
En conséquence, le système bouclé est stable pour tout  $\Delta(s)$  tel que :

$$\|\Delta(s)\|_\infty < 1 \quad (4.25)$$

Les intervalles admissibles pour l'adhérence  $\nu$ , la vitesse  $v$  et la masse  $m$ , dans lesquels la stabilité est garantie sont donc les suivants :

$$\begin{cases} \nu \in [0, 3; 1] \\ v \in [8m.s^{-1}; 12m.s^{-1}] \\ m \in [1350kg; 1650kg] \end{cases} \quad (4.26)$$

Le tableau 4.1.2.2 reporte les valeurs des différentes bornes supérieures de la valeur singulière structurée déterminées par les trois méthodes exposées dans le paragraphe 5.4 de la première partie. La pulsation correspondant au maximum de la borne supérieure est également donnée.

FIG. 4-7 –  $\bar{\mu}$  pour l'algorithme de la Trace

Méthode de réduction	$\mu$ -analyse	Pulsation du maximum	$\nu$ -analyse	Scaling en fréquence
Agrégation	1,17	$\omega = 2,40$	1,19	1,2
Troncature équilibrée	1,13	$\omega = 2,46$	1,16	1,15
Algorithme de la Trace	0,99	$\omega = 2,43$	1,05	1

Tableau 4.1.2.2 : Résultats de la  $\mu$ -analyse

De ces premiers résultats exposés dans le tableau 4.1.2.2, on remarque que la  $\mu$ -analyse qui repose sur un calcul classique de la borne supérieure donne dans ce cas des résultats fiables. Ici, le calcul point par point assure constamment la détermination de la valeur maximale de la borne supérieure.

La borne supérieure de la valeur singulière structurée dissymétrique déterminée par application du théorème 5.8.1 valide le résultat obtenu par la  $\mu$ -analyse classique et semble efficace. Les maxima donnés par les méthodes sont presque identiques, l'exploitation des valeurs peut donc utili-

ser les résultats donnés par  $\mu$ -analyse classique ou bien par suppression de l'échantillonnage en fréquence.

#### 4.1.3 Conclusion

Trois méthodes d'analyse de robustesse sont appliquées aux lois de commande synthétisées pour l'assistance au contrôle latéral. Elle fournissent toutes une borne supérieure de la valeur singulière structurée et donnent donc un indicateur de robustesse de la stabilité.

La  $\mu$ -analyse classique qui calcule la borne supérieure par échantillonnage en fréquence peut générer des résultats parfois pessimistes mais dans le cas de l'application, les résultats sont exploitables et très satisfaisants comme le montre la Figure 4-5 par exemple.

Les méthodes qui suppriment l'échantillonnage en fréquence sont a priori plus fiables et donnent des résultats cohérents. Il également à noter que [Pal03] reprend la  $\mu$ -analyse pour d'autres correcteurs réduits.

Finalement, la robustesse de la stabilité déduite de l'analyse est satisfaisante. De plus, on constate en pratique que le correcteur  $H_\infty$  assure de bonnes performances et un rejet de perturbation efficace à des vitesses plus élevées. Par exemple, la vitesse critique rendant le système en boucle fermée instable pour l'adhérence  $\nu = 0,8$  vaut  $v_c = 29,6 m.s^{-1}$ . Ces résultats garantissent donc que le correcteur synthétisé peut être utilisé sur un large domaine de fonctionnement.

Le paragraphe suivant établit une comparaison des stratégies de commande  $H_\infty$  et  $H_\infty/LPV$  pour l'application à l'assistance au contrôle latéral dans diverses situations de conduites et avec des modèles de véhicule non linéaires représentatifs d'un comportement réaliste.

## 4.2 Simulations avec correcteur $H_\infty$ fixe

Ce paragraphe propose d'analyser les réponses du système bouclé par le correcteur  $H_\infty$  développé au chapitre 2 lorsque celui-ci est soumis à des perturbations extérieures.

Les stratégies d'assistance sont testées dans de multiples situations, en présence de forces de vent latéral, pour des pertes d'adhérence, et pour

des variations de vitesse. Le modèle non linéaire présenté au paragraphe 1.5 est utilisé pour étudier le comportement de la loi de commande  $H_\infty$ . Les techniques d'intégration utilisées (ODE45 sous *Matlab*) sont réalisées avec un pas fixe qui vaut  $10^{-2}$ .

#### 4.2.1 Rejet de perturbations

Alors que le véhicule se déplace en ligne droite, deux rafales de vent d'intensité 500 N surviennent, entre  $t = 1s$  et  $t = 11s$  d'une part,  $t = 18s$  et  $t = 28s$  d'autre part.

Etant donné que le modèle conducteur constitue l'élément le plus incertain de la modélisation et du système à commander, il convient de tester la stratégie d'assistance pour différentes configurations du conducteur. Un paramètre dont les effets sont physiquement significatifs est le gain  $K_l$  (2.8). Il caractérise l'action du conducteur par rapport à sa perception du comportement de son véhicule. On choisit  $K_l$  tel que  $K_l \in \{10; 20; 30; 40\}$ , plus  $K_l$  est grand plus l'action du conducteur est vigoureuse.

Le tracé de la Figure 4-8 (a) montre un faisceau de courbes (en traits plein et pointillé) comparé avec le comportement sans assistance (ligne discontinue). Le déplacement latéral à la distance  $l_s$  avoisine 12 cm lorsque l'assistance est active et pour toutes les valeurs de  $K_l$ . En boucle ouverte,  $K_l$  vaut 20. La valeur maximale est inférieure à 20 cm ce qui répond aux spécifications. La comparaison avec le comportement sans assistance montre que le correcteur  $H_\infty$  s'avère particulièrement efficace : l'amélioration est significative par rapport à la boucle ouverte. La Figure 4-8 (b) présente l'erreur sur l'angle de cap, celle-ci reste inférieure à 0,01 radian ce qui est conforme aux exigences.

#### 4.2.2 Changement de voie

L'assistance à la conduite est maintenant testée dans une situation de changement de voie. Le véhicule se déplace à  $10 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\nu = 0.8$ . Il entre dans une chicane dont les caractéristiques sont normalisées et qui est représentée sur la Figure 4-9. Dans cette situation (Figure 4-10 (a) et (b)),  $y_L$  au centre de gravité du véhicule et  $\psi_L$  lorsque l'assistance est active, sont comparés au résultat obtenu lorsque seul le conducteur effectue la manoeuvre. Compte tenu des capacités du conducteur pour lequel

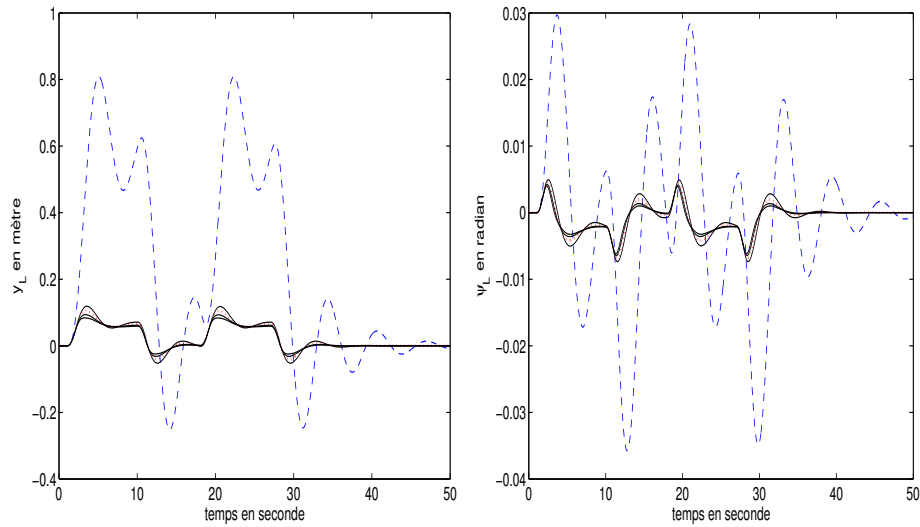


FIG. 4-8 – (a) déplacement latéral (b) erreur sur l'angle de cap avec le correcteur

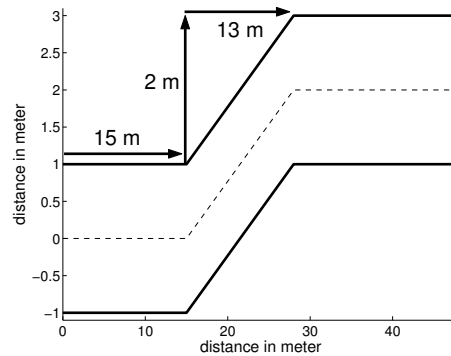


FIG. 4-9 – Profil de la chicane

$K_l \in \{10; 20; 30; 40\}$ , le résultat est très satisfaisant.

De plus, l'accélération latérale, présentée sur la Figure 4-11 respecte les spécifications. Il est à noter qu'en boucle ouverte les exigences de confort portant sur l'accélération latérale ( $a_y < 0,2g$ ) ne sont pas assurées.

### 4.2.3 Manoeuvre d'aquaplaning

Le véhicule aborde un virage de courbure constante à  $20 \text{ m.s}^{-1}$ . L'angle de braquage du conducteur est constant. De plus on suppose qu'aux instants  $t = 10, 15, 20, 25 \text{ sec}$ , les pneus traversent une zone de faible adhérence où  $\nu = 0.1$ . Les pneus retrouvent une route parfaitement sèche 2 secondes

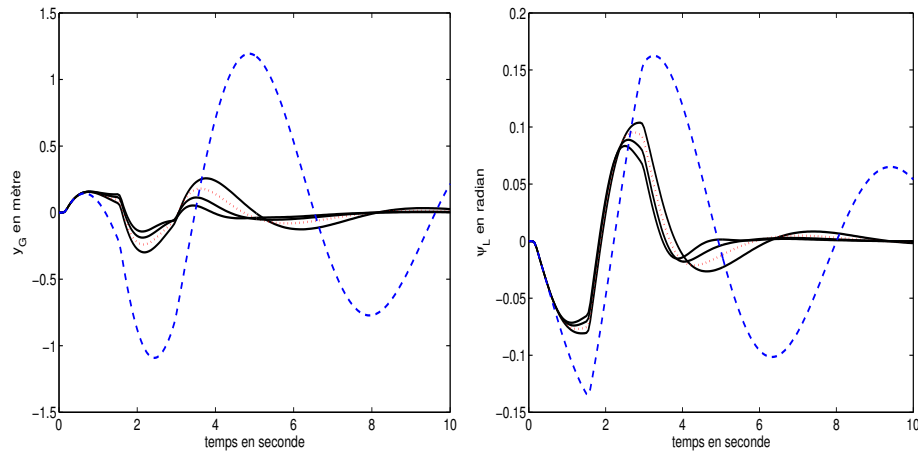


FIG. 4-10 – Comparaison (a)des déplacements latéraux (b)des erreurs sur l'angle de cap, avec et sans l'assistance

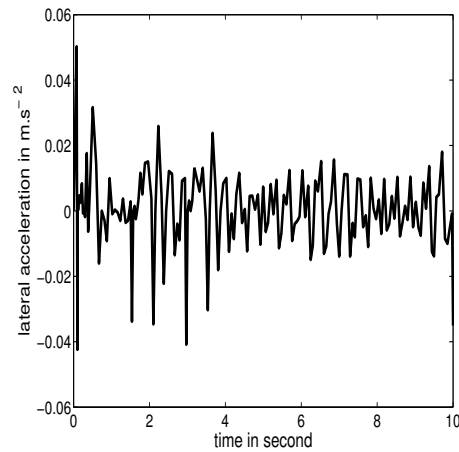


FIG. 4-11 – Accélération latérale

plus tard. La Figure 4-12 (a) présente la trajectoire nominale du véhicule ainsi que les portions de route d'aquaplaning. La Figure 4-12 (b) montre le déplacement latéral à la distance  $l_S$ , en trait plein, lorsque le dispositif d'assistance est activé. Il ne dépasse pas 20 cm par rapport à sa référence.  $y_{l_S}$  sans l'assistance, en trait pointillé, montre que le véhicule quitte la route et met en évidence l'apport sécuritaire de la stratégie adoptée. Finalement, le système en boucle fermée est stable et le correcteur  $H_\infty$  s'avère particulièrement efficace.

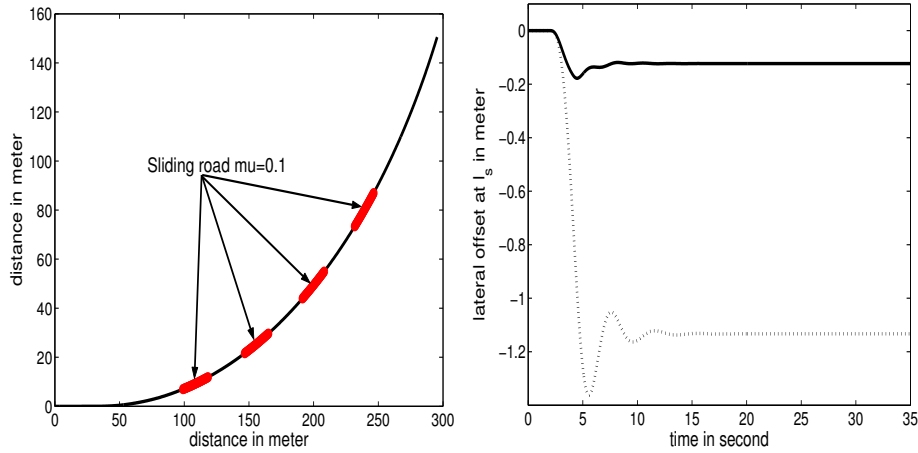


FIG. 4-12 – (a) Trajectoire nominale du véhicule (b) Comparaison des déplacements latéraux à la distance  $l_s$  avec et sans assistance

#### 4.2.4 Validation avec des données réelles

Dans ce paragraphe, les performances de la loi de commande sont mises en évidence au moyen de simulations reproduisant le comportement du véhicule sur la piste de Satory cartographiée à l'aide d'un DGPS (Differential Global Positioning System).

Le véhicule se déplace à  $10 \text{ m.s}^{-1}$  et l'adhérence vaut  $\nu = 0.8$ . Les données utilisées sont obtenues par mesure effectuées avec le véhicule de prototypage. Comme le montre la Figure 4-13, le véhicule est soumis à des rafales de vent et des pertes d'adhérence ( $\nu = 0.2$ ). La Figure 4-14 donne les déplacements latéraux du véhicule au centre de gravité. Deux trajectoires sont enregistrées. L'une en trait plein, se place dans le cas où l'assistance est active. La seconde, en pointillé, présente le déplacement latéral du véhicule en supprimant l'assistance dans les zones de rafales de vent et de pertes d'adhérence.

Les performances de l'assistance en trait plein sont meilleures que celles du dispositif en boucle ouverte piloté uniquement par le conducteur. Néanmoins,  $y_L$  n'est pas inférieur à 20 cm sur l'ensemble de la piste. En effet, des dépassements surviennent dans les portions à faible rayon de courbure qui correspondent à des virages serrés. Toutefois, la stratégie d'assistance  $H_\infty$  s'avère particulièrement efficace.

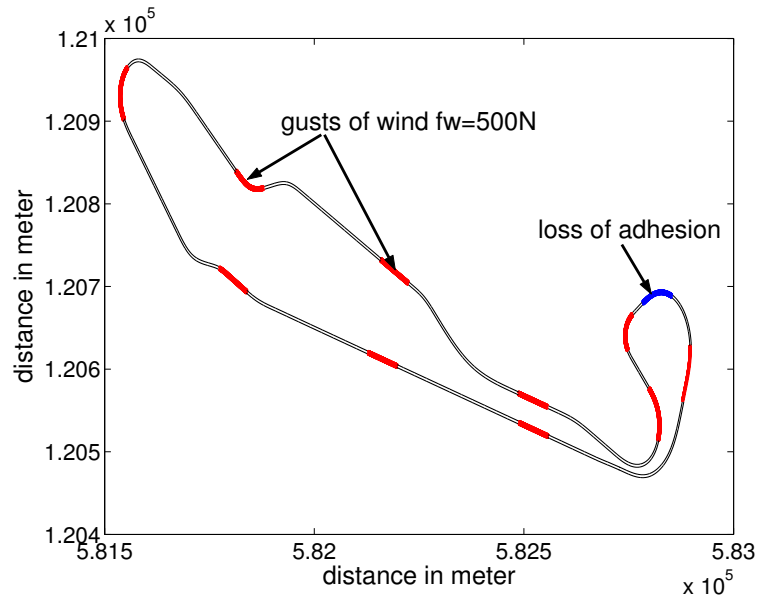
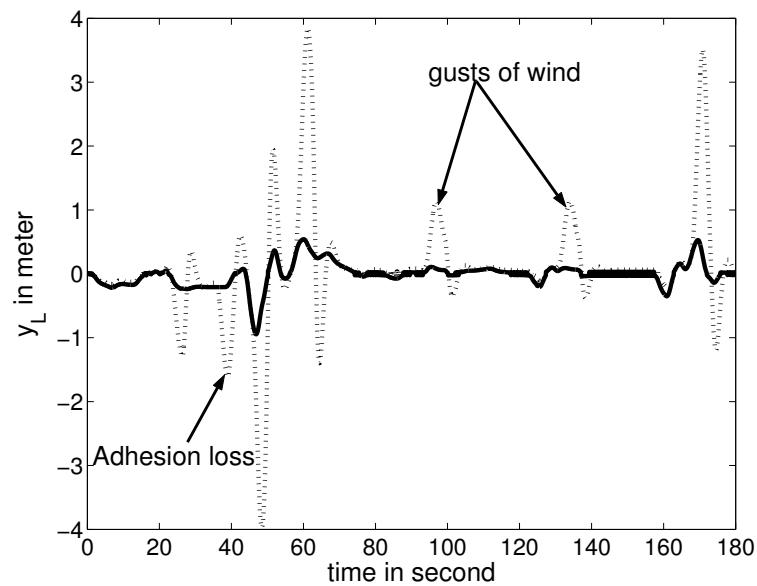


FIG. 4-13 – Présentation de la piste cartographiée

FIG. 4-14 –  $y_L$  sur la moitié de la piste

### 4.3 Comparaison des stratégies $H_\infty$ et LPV

Dans ce paragraphe, des simulations non linéaires sont effectuées dans différentes situations de conduite, à vitesse variable. Les résultats obtenus par le correcteur  $H_\infty$  synthétisé à vitesse fixe et par le correcteur LPV sont



comparées.

### 4.3.1 Rejet de perturbation

Des rafales de vent d'intensité  $f_w = 500\text{N}$ , présentées sur la Figure 4-15 (a) sont appliquées au véhicule qui se déplace à vitesse variable (Figure 4-15 (b)) sur une ligne droite.

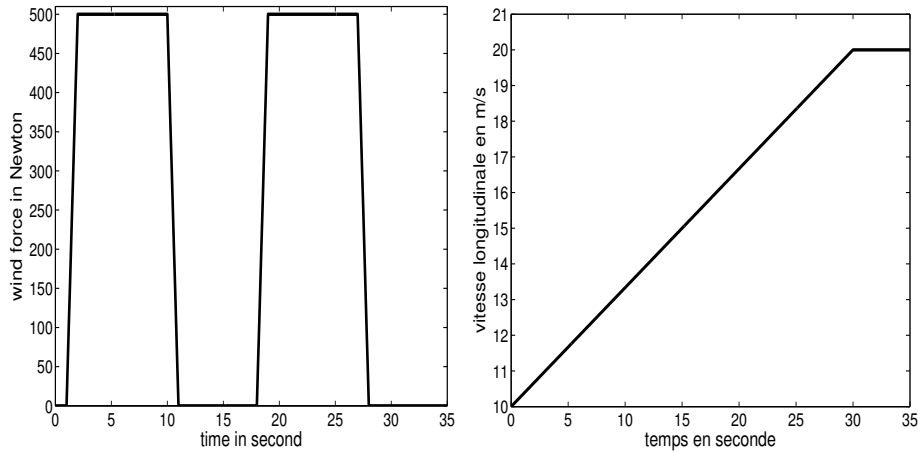


FIG. 4-15 – (a)Rafales de vent latéral (b)Profil de vitesse

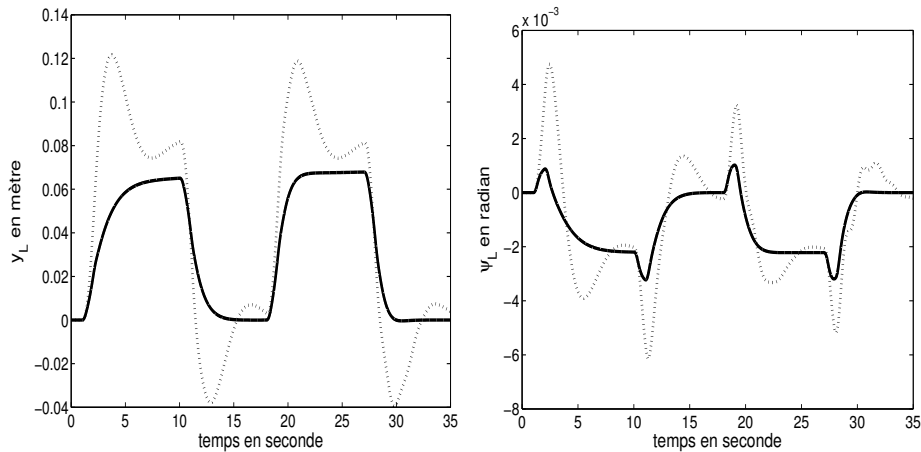


FIG. 4-16 – (a) $y_L$  avec les rafales de vent latéral  $f_w = 500\text{N}$  (b)  $\psi_L$

Sur la Figure 4-16, les tracés en trait plein représentent les réponses du véhicule assisté par le correcteur LPV et en ligne pointillée celles du système en boucle fermée avec un correcteur  $H_\infty$  fixe.

La Figure 4-16 (a) en trait plein montre que  $y_L$  reste inférieur à 7cm, le

véhicule reste donc très proche du centre de la voie. La comparaison avec le correcteur  $H_\infty$  fixe montre que le correcteur LPV est très efficace. La Figure 4-16 (b) présente l'erreur sur l'angle de cap. Avec le correcteur LPV, celle-ci reste inférieure à 0,003 radian.

De plus, le couple d'assistance  $T_a$  est inférieur à 3  $N.m$ , comme le montre la Figure 4-17, ce qui est compatible avec les performances des actionneurs de direction actuels.

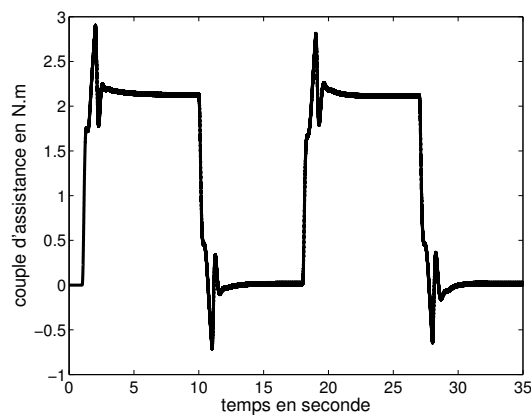


FIG. 4-17 – Couple d'assistance  $T_a$

#### 4.3.2 Rejet de perturbation et décélération en virage

Dans ce cas, le véhicule arrive dans un virage à  $20 \text{ m.s}^{-1}$  pour ralentir à  $10 \text{ m.s}^{-1}$ , tout en subissant des rafales de vent pour des conditions d'adhérence telles que  $\nu = 0,7$ . La stratégie d'assistance intégrant le correcteur LPV est active et les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 4-18.

La Figure 4-18 (a) montre que le déplacement latéral  $y_L$ , avec le correcteur LPV (en trait plein) ne dépasse pas la limite des 20 cm, ce qui correspond à une erreur acceptable. De même, l'utilisation du correcteur LPV améliore la réponse  $\psi_L$  sur la Figure 4-18 (b). Le système en boucle fermée est stable et la stratégie de commande intégrant le correcteur LPV est plus performante que celle utilisant un correcteur  $H_\infty$  fixe. Le correcteur LPV s'avère donc particulièrement efficace dans cette manoeuvre.

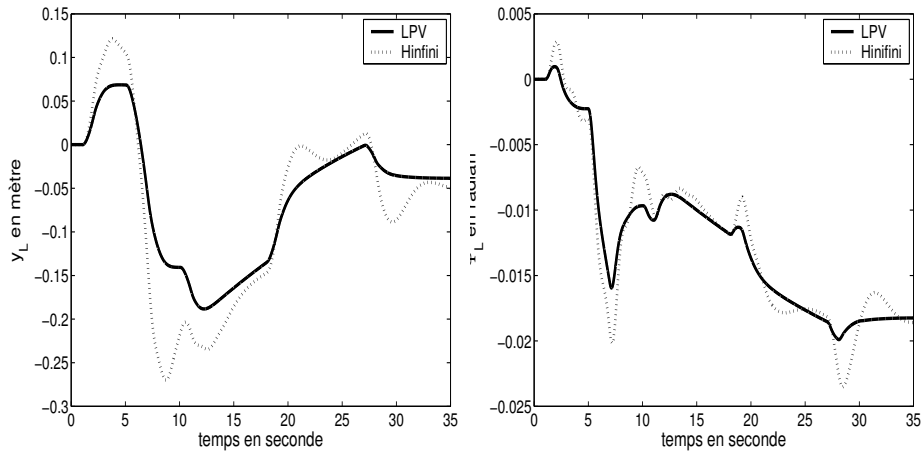


FIG. 4-18 – (a)  $y_L$  (b)  $\psi_L$ , avec les rafales de vent  $f_w = 500N$  en virage

### 4.3.3 Rejet de perturbation et perte d'adhérence à vitesse variable

Cette situation présente une manoeuvre pour laquelle le véhicule aborde un virage à  $20 \text{ m.s}^{-1}$  et ralentit à  $10 \text{ m.s}^{-1}$  de manière linéaire. L'angle de braquage du conducteur est constant. Il est soumis à deux rafales de vent d'intensité  $f_w = 500N$  et les pneumatiques traversent des zones de faible adhérence où  $\nu = 0,1$  aux instants  $t = 10, 15, 20, 25$  secondes. Ils retournent sur un revêtement parfaitement sec 2 secondes plus tard. L'assistance au contrôle latéral utilisant le correcteur LPV est active et les résultats sont exposés.

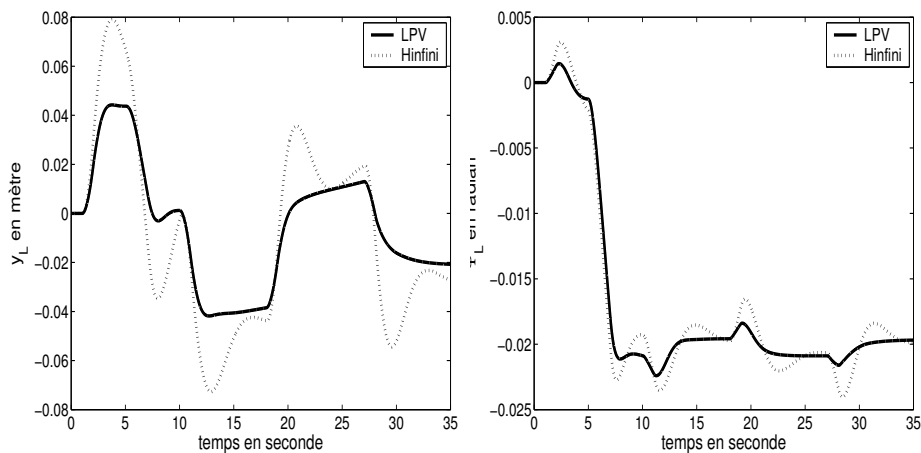


FIG. 4-19 – (a)  $y_L$  (b)  $\psi_L$ , avec les rafales et pertes d'adhérence en virage

Sur la Figure 4-19 (a), le déplacement  $y_L$  obtenu avec le correcteur LPV (en trait plein) est inférieur à 4 cm. La Figure 4-19 (b) présente la réponse de l'erreur sur l'angle de cap  $\psi_L$ . Celle-ci est très satisfaisante de sorte que l'intégration de la commande linéaire à paramètre variant est prometteuse.

#### 4.3.4 Validation sur la piste d'essai cartographiée

Ce paragraphe porte son attention sur la comparaison des déplacements latéraux  $y_L$  avec les stratégies d'assistance utilisant les correcteurs  $H_\infty$  fixe et LPV du véhicule sur la piste de Satory cartographiée avec un DGPS. Le véhicule se déplace à vitesse variable dans les limites de  $10m.s^{-1}$  et  $20m.s^{-1}$ . On représente sur la Figure 4-20 les résultats de deux simulations sur une partie de la piste.

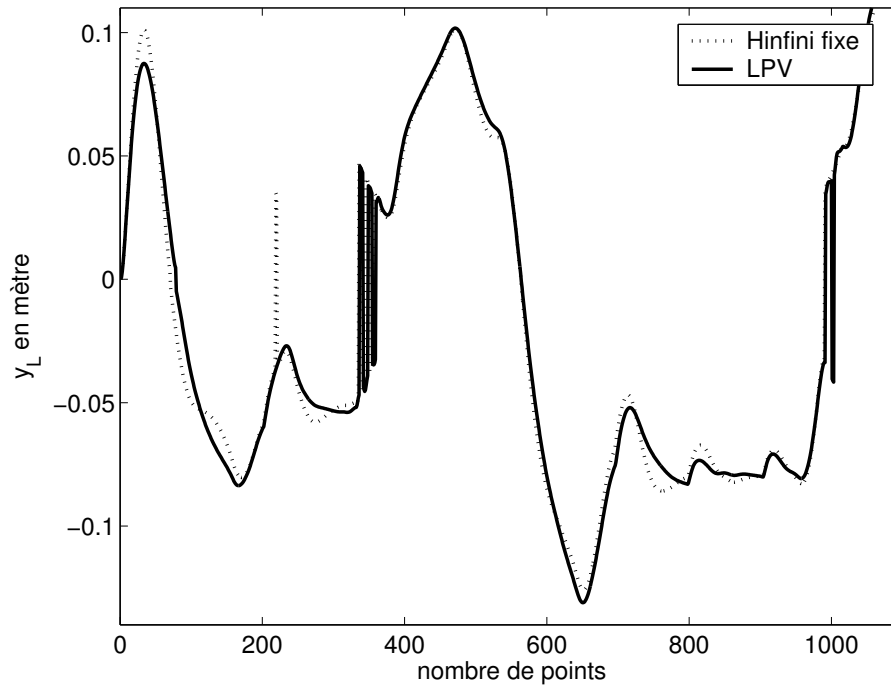


FIG. 4-20 – Comparaison des déplacements latéraux sur la piste entière

Le résultat obtenu avec la stratégie d'assistance intégrant le correcteur LPV est sensiblement meilleur. Les dépassements sont moins importants que ceux engendrés avec le correcteur  $H_\infty$  fixe et les spécifications sont respectées excepté dans les virages délicats de la piste.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les analyses et comparaisons des lois commande  $H_\infty$  et LPV par approche polytopique appliquées à l'assistance au contrôle latéral sont menées.

D'un point de vue global, il convient de remarquer que les spécifications de robustesse sont respectées. Les correcteurs  $H_\infty$  qui ont fait l'objet d'une réduction d'ordre permettent au système bouclé soumis à plusieurs incertitudes paramétriques telles que la vitesse, l'adhérence, la masse et aux incertitudes dynamiques caractérisées par le conducteur, d'assurer une robustesse de stabilité sur un large domaine de fonctionnement. L'assistance au conducteur escomptée est réalisée de manière efficace.

Afin d'étudier plus finement l'application de la stratégie de synthèse,

des simulations intégrant des modèles non linéaires de véhicule ont été réalisées. Elles mettent en comparaison l'utilisation de correcteurs LPV et  $H_\infty$ . La loi de commande issue de la théorie des systèmes LPV par approche polytopique où le paramètre variant est la vitesse longitudinale, présente de meilleurs résultats dans des conditions de conduites variées et dégradées. Cette méthodologie est plus performante que celles basées sur la construction de correcteurs fixes dans la mesure où la stabilité du système en boucle fermée est garantie pour toute variation du paramètre sur l'intervalle considéré.

Les perspectives immédiates de ce travail consistent maintenant à tester et valider les commandes LPV et  $H_\infty$  expérimentalement d'abord sur un banc test reproduisant l'équipement d'une Peugeot 307 puis sur véhicule.



# Conclusion générale et perspectives

Dans cette Thèse, les travaux présentés traitent de stratégies de commande pour l'assistance au contrôle latéral d'un véhicule routier.

Tout au long de ce mémoire, l'accent est porté sur le choix et l'étude des méthodologies de contrôle, leur application et la validation des lois de commande robustes adoptées. La stabilisation du véhicule, le rejet des perturbations extérieures modélisées par les courbures de la route et les rafales de vent latéral, font l'objet d'une grande attention de même que la robustesse face aux erreurs de modélisation et aux variations paramétriques des modèles.

Les objectifs de commande sont traités dans le domaine fréquentiel en modélisant les transferts entre les entrées constituées du couple d'assistance  $T_a$  et la perturbation  $f_w$  et les sorties régulées qui sont le déplacement latéral  $y_L$  et l'erreur sur l'angle de cap  $\psi_L$ .

Tout d'abord, la première partie concerne la modélisation, la synthèse et l'analyse des systèmes incertains. Elle constitue le développement méthodologique des outils qui sont utilisés dans la deuxième partie. Les stratégies de commande et d'analyse des correcteurs synthétisés sont présentées. Mes travaux se sont axés sur les techniques de commande robuste qui utilisent les synthèses  $H_\infty$  standard et  $H_\infty$ -LPV. L'implantation de correcteurs d'ordre élevés n'est pas souhaitable, l'élaboration d'un correcteur d'ordre réduit s'avère donc une solution adaptée. Trois méthodes sont proposées, la première est une réduction par agrégation modale, la deuxième se fonde sur la troncature des valeurs singulières de Hankel et la troisième constitue une synthèse de correcteur avec contrainte d'ordre. Elle utilise la méthodologie de la complémentarité conique.



L'analyse de robustesse des lois de commande a introduit les outils qui se basent sur la notion de la valeur singulière structurée  $\mu$ . Il est possible que les algorithmes faisant appel à un échantillonnage en fréquence ne parviennent pas à détecter un pic et qu'ils valident ainsi une loi non-performante, c'est pourquoi une analyse avec suppression de l'échantillonnage en fréquence est envisagée.

La seconde partie est dédiée à l'application à l'assistance au contrôle latéral d'un véhicule routier. La comparaison des modèles linéaire et non linéaire de véhicule est réalisée et montre la validité des hypothèses simplificatrices. La stratégie de commande adoptée tient compte des trois composantes que sont le véhicule, la colonne de direction et le conducteur. D'abord dans le cadre d'une synthèse de correcteur  $H_\infty$  à vitesse fixe, les spécifications sont respectées. Les résultats sont obtenus dans de multiples situations de conduite dégradées telles que des pertes d'adhérence, des rafales de vent, des changements de voies et utilisent les données de la piste d'essai cartographiée de Satory. Le dispositif d'assistance active confère au système en boucle fermée de bonnes propriétés de robustesse comme le montre la  $\mu$ -analyse.

Ensuite, pour améliorer le domaine de stabilité du système commandé, un correcteur séquencé par la vitesse longitudinale est synthétisé. Il est plus performant et les résultats obtenus dans les mêmes conditions que pour le correcteur  $H_\infty$  fixe sont meilleurs. La stabilité du système en boucle fermée est garantie pour toute variation du paramètre sur l'intervalle considéré.

Le développement de ces stratégies d'assistance au contrôle latéral fournit des résultats concluants et très prometteurs. Un banc de test reproduisant l'équipement d'une Peugeot 307 est en cours d'élaboration au LIVIC. Il sera interfacé à un simulateur de conduite et fera donc prochainement l'objet de tests de validation des commandes  $H_\infty$  et LPV avant l'implantation sur véhicule.

Cette Thèse se focalise sur l'assistance à la conduite, c'est à dire à la correction d'erreurs de conduite dues à des pertes de vigilance, une vitesse trop importante ou à l'intervention d'un dispositif de sécurité active face à des phénomènes extérieures trop rapides pour le conducteur et accidentogènes tels que des pertes d'adhérence et des rafales de vent latéral.

Associé au contrôle longitudinal qui pourrait s'inscrire dans le cadre du prolongement d'une action sur le freinage et l'accélération, l'assistance utilisant le braquage actif des roues constituerait une solution efficace dans de nombreuses situations de perte de contrôle du véhicule. De plus, un gain significatif en terme de capacité de circulation de l'infrastructure et de sécurité peut être obtenu.

De plus, la réussite de la stratégie d'assistance au contrôle latéral a fait naître le besoin d'une loi de commande robuste séquencée par le paramètre le plus facilement mesurable : la vitesse. La méthode adoptée est fondée sur une approche polytopique qu'il conviendrait de généraliser comme le proposent [Pac94] et [AG95]. Elle a fait l'objet d'une étude dans le cadre d'application de la Thèse mais le mauvais conditionnement des matrices intervenant dans la résolution des LMI n'a pas permis à ce stade d'aboutir à une solution exploitable et constitue donc une perspective de développement méthodologique.

Le projet ARCoS dans lequel s'insère cette Thèse a été un moyen de réunir un grand nombre de partenaires académiques, institutionnels et industriels autour de la problématique de la conduite sécurisée. Les solutions apportées concernant spécifiquement l'assistance au contrôle latéral ont permis de répondre à une demande de sécurisation de la conduite. Cette thématique englobe autant celle de la dynamique véhicule que celle des interactions avec l'infrastructure et le conducteur qui offre d'intéressants champs d'applications à l'Automatique.

Aujourd'hui, un axe prometteur est celui des approches de partage de la conduite entre le conducteur et l'organe de commande utilisant les directions de type steer-by-wire. Dans ce domaine, les constructeurs japonais sont déjà très impliqués.



# References

- [AA98] P. Apkarian and R. Adams. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 6(1) :21–32, 1998.
- [AB96] J. Ackermann and T. Bünte. Handling improvement for robustly decoupled car steering dynamics. *4<sup>th</sup> IEEE Mediterranean Symposium New Directions in Control and Automation*, 1996.
- [AB98] J. Ackermann and T. Bünte. Handling improvement of robust car steering. *International Conference on Advances in Vehicle Control and Safety*, 1998.
- [AG95] P. Apkarian and P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled  $H_\infty$  controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5) :853–864, 1995.
- [AGB95] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker. Self-scheduled  $H_\infty$  control of linear parameter-varying systems : a design example. *Automatica*, 31(9) :1251–1261, 1995.
- [AGS<sup>+</sup>95] J. Ackermann, J. Guldner, W. Sienel, R. Steinhauser, and V.I Utkin. Linear and non-linear controller design for robust automatic steering. *IEEE Transactions on Control Systems Technology, Special Issue on Automotive Steering*, 3 :132–143, 1995.
- [AJR93] Kaesbauer D. Sienel W. Ackermann J., Bartlett A. and Steinhauser R. *Robust control : Systems with uncertain physical parameters*. Springer, London, 1993.
- [AL89] B.D.O Anderson and Y. Liu. Controller reduction : Concepts and approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 40(8) :802–812, 1989.
- [AM96] D. Aubert and S. Mammar. *Contrôle latéral automatique d'un véhicule à l'aide d'une caméra : cas du suivi de route*. revue R.T.S (Recherche-Transports-Sécurité), 1996.

- [Bag01] Vahe B. Baghdassarians. *Commandes Robustes pour le contrôle latéral d'un véhicule routier*. Thèse de doctorat, Université d'Evry Val d'Essonne, 2001.
- [BAM96] J.M. Blosseville, D. Aubert, and S. Mammar. La route automatisée état de l'art et réflexions. rapport technique, LIVIC pour le compte de la DRAST, 1996.
- [BBFG93] S. Boyd, V. Balaskrishnan, E. Feron, and L. El Ghaoui. Control system and synthesis via linear matrix inequalities. *American Control Conference*, pages 2147–2154, 1993.
- [BBN90] S. Boyd, C. Barrat, and S. Norman. Linear controller design : limits of performance via convex optimization. *IEEE Transactions on Automatic*, 78(3) :529–574, 1990.
- [BC92] C.M. Belcastro and B.C. Chang. On parametric uncertainty modeling for real parameter variations. *31<sup>st</sup> Conf. on Decision and Control*, pages 674–679, 1992.
- [BD97] C. Beck and R. D'Andrea. Minimality, controllability and observability for uncertain systems. *American Control Conference*, pages 3130–3135, 1997.
- [BD99] C. Beck and J.C. Doyle. A necessary and sufficient minimality condition for uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(10) :1802–1813, 1999.
- [Bec94] C. Beck. Minimality for uncertain systems and IQC's. *IEEE Trans. Autom. Control*, AC 40(5) :853–864, 1994.
- [BGFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control*. Studies in Applied Mathematics SIAM, 1994.
- [BM00] J.M. Blosseville and S. Mammar. Update from the french program : La route automatisée. *IEEE Intelligent Transportation Systems Conference*, 2000.
- [BPL89] E. Baker, H.B. Pacejka, and L. Lidner. A new tire model with an application in vehicle dynamics studies. *SAE*, (890087), 1989.
- [CdWT99] C. Canudas de Wit and P. Tsiotras. Dynamic tire friction models for vehicle traction control. in *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3746–3751, 1999.

- [CG96] M. Chilali and P. Gahinet.  $H_\infty$  design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, AC 41 :358–367, 1996.
- [Chr96] Urs Christen. *Engineering Aspects of  $H_\infty$  Control*. Thèse de doctorat, Swiss Federal Institute of Technology, 1996.
- [Cla02] X. Claeys. *Commande latérale des véhicules automobiles avec prise en compte de la dynamique des actionneurs. Application à la conduite en peloton des poids lourds sur autoroute*. Thèse de doctorat, Laboratoire d'Automatique de Grenoble (LAG), 2002.
- [CM94] Y. Cheng and B. De Moor. A multidimensional realization algorithm for parametric uncertainty modeling and multiparameter margin problems. *Int. J. Control*, 60 :789–807, 1994.
- [Com78] G. Commault. *Sur la simplification des modèles linéaires par agrégation*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 1978.
- [CT94] W. Chee and M. Tomizuka. Lane change maneuver of automobiles for the intelligent vehicle highway system (IVHS). *American Control Conference*, pages 3586–3587, 1994.
- [Deb96] P. Debay. *Amélioration de l'accessibilité des autobus urbains pour les personnes à mobilité réduite : guidage à l'accostage*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1996.
- [DF95] G. Duc and S. Font. An algorithm to perform  $\mu$ -analysis without frequency griding. rapport de recherche, Service Automatique de Supélec, 1995.
- [DF99] G. Duc and S. Font. *Commande  $H_\infty$  et  $\mu$ -Analyse : des Outils pour la Robustesse*. Editions Hermès, Paris, 1999.
- [DFBV97] G. Duc, S. Font, S. Le Ballois, and C. Valentin. Synthèse  $H_\infty$  et  $\mu$ -analyse, des outils pour la robustesse - méthodologie et applications. *3ème Séminaire sur Commande Robuste et ses Applications SCRA'97, Nabeul, Tunisie*, 1997.
- [DFS70] J. Dugoff, P. Fanches, and L. Segel. An analysis of tire traction properties and their influence on vehicle dynamic performance. *SAE*, (700377), 1970.
- [DG98] S. Dussy and L. El Ghaoui. Measurement-scheduled control for RTAC problem : an LMI approach. *International Journal of Robust and Non Linear Control*, 8 :377–400, 1998.

- [DGKF89] J.C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis. State space solutions to standard  $H_2$  /  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, (34) :831–848, 1989.
- [DK97] R. D’Andrea and S. Khatiri. Kalman decomposition of linear fractional transformation representations and minimality. *American Control Conference*, pages 3557–3561, 1997.
- [DÖL01] Carsten DÖLL. *La Robustesse de Lois de commande pour des structures flexibles en Aéronautique et Espace*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace, 2001.
- [DM00] T. D. Day and L. D. Metz. The simulation of driver inputs using a vehicle driver model. *Society of Automotive Engineers*, 2000.
- [Doy85] J.C. Doyle. Structured uncertainty in control systems design. *24<sup>th</sup> Conf. on Decision and Control*, pages 260–265, 1985.
- [DV75] C. A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback System : Input-Output Properties*. Academic Press, 1975.
- [Enn84] D. Enns. Model reduction with balanced realizations : An error bound and a frequency weighted generalization. *23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 127–132, 1984.
- [Fen99] K.T. Feng. Look-ahead human machine interface for assistance of manual vehicle steering. *American Control Conference*, 1999.
- [FF97] G. Ferreres and V. Fromion. Computation of the robustness margin with the skewed  $\mu$  tool. *Systems and Control Letters*, 32 :193–202, 1997.
- [FGD98] J.P. Friang and J.P. Bonnet G. Duc. Robust autopilot for flexible missile : Loop-shaping  $H_\infty$  design and real  $\nu$ -analysis. *Int. J. of Robust and Nonlinear Contr.*, 8 :129–153, 1998.
- [Fon95] Stéphane Font. *Méthodologie pour prendre en compte la Robustesse des systèmes asservis : Optimisation  $H_\infty$  et Approche symbolique de la forme Standard*. Thèse de doctorat, Université de Paris Sud et Supélec, 1995.
- [FT92] M.K.H Fan and A. Tits. A measure of worst-case  $H_\infty$  performance and of largest acceptable uncertainty. *Systems and Control Letters*, 18 :409–421, 1992.

- [FTD91] M. K. H. Fan, A. L. Tits, and J. C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Trans. Autom Control*, (36) :25–38, 1991.
- [FTT99] K.T. Feng, H.S. Tan, and M. Tomizuka. Futur predictor for vehicle steering guidance-sensitivity analysis and experimental results. *Conference on Decision and Control*, 1999.
- [FTT00] K.T. Feng, H.S. Tan, and M. Tomizuka. Design of vehicle lateral guidance system for driver assistance. *American Control Conference*, 2000.
- [GA94] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control. *Int. J. of Robust And Nonlinear Control*, 4 :421–448, 1994.
- [GB95] G. Garcia and J. Bernussou. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, AC 40(1) :184–190, 1995.
- [GBA95] G. Garcia, J. Bernussou, and D. Arzelier. A LMI solution for disk pole location with  $H_2$  guaranteed cost. *3<sup>rd</sup> European Control Conference*, pages 3728–3733, 1995.
- [GD88] K. Glover and J.C. Doyle. State-space formulation for all stabilizing controllers that satisfy an  $H_\infty$ -norm bound and relations to risk sansitivity. *Systems and Control Letters*, 11 :167–172, 1988.
- [Gil92] T.D. Gillespie. Fundamentals of vehicles dynamics. *Society of Automotive Engineers*, 1992.
- [Glo84] K. Glover. All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $L^\infty$ -error bounds. *Int. J. Control*, 39 :1115–1193, 1984.
- [GOA97] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami. A cone complementarity linearization algo-rithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 42(8), 1997.
- [GTP96] J. Guldner, H.S. Tan, and S. Patawardhan. Analysis of automatic steering control for highway vehicles with look-down lateral reference systems. *Vehicle System Dynamics*, 26 :243–269, 1996.



- [GUP94] J. Guldner, V.I. Utkin, and S. Patawardhan. A sliding mode control approach to automatic car steering. *American Control Conference*, 1994.
- [Hel95] A. Helmerson. A finite frequency method for  $\mu$ -analysis. *3<sup>rd</sup> European Control Conference*, pages 2181–2186, 1995.
- [Hir99] Arnaud Hired. *Pilotage Robuste d'un Missile sur un Large Domaine de Vol, Synthèse et Analyse dans le cadre  $H_\infty$  et LPV*. Thèse de doctorat, Université de Paris Sud et Supélec, 1999.
- [HJ85] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [HP90] M. Tomizuka H. Peng. Lateral control of front-wheel-steering rubber-tire vehicles. rapport de recherche UCB-ITS-PRR-90-5, PATH Research Report, 1990.
- [HPTZ91] T. Hessburg, H. Peng, M. Tomizuka, and W.B. Zhang. An experimental study on lateral control of vehicle. Technical report, PATH Research report, 1991.
- [HRBW81] P.B. Hunt, D.I. Robertson, R.D. Bretherton, and R.I. Winton. Scoot - a traffic responsive method of coordinating signals. rapport technique 1014, Department of the Environment, Department of Transport TRRL Laboratory, 1981.
- [HS75] J. Hickin and N.K. Sinha. Optimally aggregated models of high order systems. *Elect Letters*, 11(25/26) :632–663, 1975.
- [HT95] T. Hessburg and M. Tomizuka. An adaptation method for fuzzy logic controllers in lateral control of a vehicle. rapport de recherche UCB-ITS-PRR-95-21, PATH Research Report, 1995.
- [IS94] T. Iwasaki and R. E. Skelton. All controllers for the general  $H_\infty$  control problem : LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 30(8) :1303–1317, 1994.
- [Ka00] S. Kato and al. Lateral and longitudinal control algorithms for visual platooning of autonomous vehicles. *Proc : FISITA World Automotive Congress*, 2000.
- [KS80] Y. K. Kwak and C.C. Smith. An active and passive steering controller study of rubber-tired automated guideway transit vehicles. *Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, (102) :168–173, 1980.

- [Liu89] S. Liu. On lateral control of highway vehicles guided by a looking sensor. *Advanced Technology of Transportation : ASME*, 1989.
- [LSA81] N.A. Lehtomaki, N.R. Sandell, and M. Athans. Robustness results in linear quadratic gaussian based multivariable control designs. *IEEE Trans. Autom. Control*, AC 26(1) :75–93, 1981.
- [LTBS93a] P. Lambrechts, J. Terlouw, S. Bennami, and M. Steinbuch. Parametric uncertainty modeling using LFTs. *Proc. of the American Control Conference*, pages 267–272, 1993.
- [LTBS93b] P.F. Lambrechts, J.C. Terlouw, S. Bennani, and M. Steinbuch. Parametric uncertainty modeling using lfts. *American Control Conference*, pages 267–272, 1993.
- [Lug77] P. Lugner. The influence of structure of automobile models and tire characteristics on the theoretical results of steady-state and transient vehicle performance. *The Dynamics of Vehicles, Proceedings 5th VSD-2nd IUTAM Symposium*, 1977.
- [Lya88] A. Lyapunov. *Problème Général de la Stabilité du Mouvement*. Jacques Gabay, 1988.
- [Mam92] Saïd Mammar. *Commande Multivariable Robuste par les Approches LQG/LTR et  $H_\infty$  - Application à un Hélicoptère*. Thèse de doctorat, Université de Paris Sud et Supélec, 1992.
- [Mam96] S. Mammar.  $H_\infty$  robust steering of a vehicle. *IEEE Intelligent Vehicles*, 1996.
- [Mam98] S. Mammar. Robust automatic steering using fuzzy modeling and lmi control. *IFAC Conference on System Structure and Control*, 1998.
- [Mam99] S. Mammar. Le contrôle latéral pour l'automatisation et l'assistance à la conduite. *Congrès international francophone ATEC*, 1999.
- [Mam00] S. Mammar. Two-degree-of-freedom  $H_\infty$  optimization and scheduling for robust vehicle lateral control. *Vehicle Systems Dynamics Journal*, 34 :401–422, 2000.
- [Mam01] S. Mammar. Feedforward and feedback control for vehicle handling improvement by active steering. *3rd IFAC Workshop on Advances in Automotive Control*, pages 135–140, 2001.

- [MB00] S. Mammar and V.B. Baghdassarian. Two-degree-of-freedom formulation of vehicle handling improvement by active steering. *American Control Conference*, 2000.
- [MD95] J.F. Magni and C. Döll.  $\mu$ -analysis for flexible systems. rapport technique, ONERA-CERT, 1995.
- [MG91] D. Mustafa and K. Glover. Controller reduction by  $H_\infty$ -balanced truncation. *IEEE Trans. Autom. Control*, AC 36(6) :668–682, 1991.
- [MH93] A. Modjtahedzadeh and R. A. Hess. A model of driver steering control behavior for use in assessing vehicle handling qualities. *Transactions of the ASME*, (15) :456–464, 1993.
- [MJS76] G. Michalesco and P. Bertrand J.M. Siret. Comments on optimally aggregated models of high order systems. *Elect Letters*, 12(8) :207–208, 1976.
- [MJS79] G. Michalesco and P. Bertrand J.M. Siret. Modélisation de grands systèmes par agrégation. *RAIRO Automatique/Systems Analysis and Control*, 13(2) :159–170, 1979.
- [MK02] S. Mammar and D. Koenig. Vehicle handling improvement by active steering. *Vehicle System Dynamics Journal*, 38(11) :211–242, 2002.
- [Moo81] B.C Moore. Principal components analysis in linear system : Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Trans. Autom. Control*, 26(1) :17–31, 1981.
- [Mor85] B.G Morton. New applications of  $\mu$  to real parameter variation problems. *24<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 242–250, 1985.
- [NW79] R.L. Nisonger and D.N. Wormley. Dynamic performance of automated guideway transit vehicles with dual-axle steering. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 28 :88–94, 1979.
- [OIU96] R.T. O'Brien, P.A. Iglesias, and T.J. Urban. Vehicle lateral control for automated highway systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4 :266–273, 1996.
- [PAA00] P.C. Pellanda, P. Apkarian, and D. Alazard. Gain-scheduling through continuation of observer-based realizations-applications to  $H_\infty$  and  $\mu$  controllers. *39<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 2787–2792, 2000.

- [Pac79] H.B Pacejka. Tires factors and vehicle handling. *Int. J Vehicle Design*, 1 :1–23, 1979.
- [Pac94] A. Packard. Gain-scheduling via linear fractional transformations. *Systems and Control letters*, 22 :79–92, 1994.
- [Pal03] Luca Palladino. Synthèse de correcteurs robustes d'ordre réduit par l'optimisation  $H_\infty$  et les inégalités matricielles linéaires : Application au contrôle latéral d'un véhicule routier. Stage de fin d'études, Service Automatique de Supélec, Février 2003.
- [Pha90] A.T. Pham. Nouvelle méthode de modélisation de la dynamique des véhicules. *SIA*, 1990.
- [PHT94] H. Pham, K. Hedrick, and M. Tomizuka. Combined lateral and longitudinal control of vehicles. *American Control Conference*, pages 1205–1206, 1994.
- [Pom93] D.A. Pomerleau. Neural network for intelligent vehicles. *Intelligent Vehicles Conference*, 1993.
- [PT90] H. Peng and M. Tomizuka. Vehicle lateral control fro highway automation. *American Control Conference*, pages 788–794, 1990.
- [PTG90] I. Poslehwaite, M-C Tsai, and D-W Gu. Weighting function selection in  $h_\infty$  design. *IFAC World Congress*, 1990.
- [PZPB91] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey, and G. Becker. A collection of robust control problems leading to LMI's. *IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 1245–1250, 1991.
- [RAu98] RAut2. *La Route Automatisée : Ouvrage collectif*. ISBN 2-7261-1126-2, 1998.
- [Sa78] S.E. Shladover and al. Steering controller design for automated guideway transit vehicles. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 100, 1978.
- [Sch95] C. Scherer. Mixed  $H_2/H_\infty$  control. *Trends in Control : A European perspective (A. Isidori,Ed.)*, pages 173–216, 1995.
- [Sco97] Gérard Scorletti. *Approche Unifiée de l'Analyse et de la Commande des Systèmes par Formulation LMI*. Thèse de doctorat, Université de Paris Sud et Supélec, 1997.
- [SDHT91] S.E. Shladover, C.A. Desoer, J.K. Hedrick, and M. Tomizuka. Automatic vehicle control developments in the path program. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 40, 1991.

- [Sid92] A. Sideris. Elimination of frequency search from robustness tests. *IEEE Trans. Autom. Control*, AC 37(10) :1635–1640, 1992.
- [SMB79] J.M. Siret, G. Michailenco, and P. Bertrand. On the use of aggregation techniques. *Handbook of Large Scale Systems Engineering Applications*, M. Singh and A. Titli Edts, North-Holland :20–27, 1979.
- [SPG95] R. Samar, I. Postlethwaite, and W. Gu. Model reduction with balanced realizations. *Int. J. Control*, 62(1) :33–64, 1995.
- [UT71] J.M Undrill and A.E Turner. Construction method for reducing the order of linear systems electromechanical equivalents by modal analysis. *IEEE Trans. on Power App. Systems*, PAS 90 :214–245, 1971.
- [VC98] C. Valentin-Charbonnel. *Commande Robuste avec Contrainte d'Ordre, par la Norme  $H_\infty$  et le Formalisme LMI. Application au Contrôle d'Attitude d'un Satellite d'Observation de la Terre.* Thèse de doctorat, Université de Paris Sud et Supélec, 1998.
- [VD99] C. Valentin and G. Duc. Optimizing  $\mu$ -analysis without frequency gridding - application to a satellite attitude control law. *European Control Conference*, 1999.
- [Wor94] P.M.R Wortelboer. *Frequency-Weighted Balanced Reduction of Closed-Loop Mechanical Servo-Systems.* Thèse de doctorat, Delft University of Technology, 1994.
- [YND95] P.M. Young, M.P. Newlin, and J.C Doyle. Computing bounds for the mixed  $\mu$  problem. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, 5 :573–590, 1995.
- [ZD98] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essential of Robust Control.* Pentice Hall, New Jersey, 1998.
- [ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control.* Pentice Hall, New Jersey, 1996.